B. Droașcă • Eugenia Kalisz
V. Prepeliță • Doina Stănescu

# ANALIZA ASISTATĂ DE CALCULATOR A SISTEMELOR BIDIMENSIONALE

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

Scanned with OKEN Scanner

Dr. ing. BOGDAN DROAŞCĂ, dr. ing. EUGENIA KALISZ,
dr. VALERIU PREPELIŢĂ, dr. ing. DOINA STĂNESCU

# Analiza asistată de calculator a sistemelor bidimensionale

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ ŞI ENCICLOPEDICĂ
Bucureşti, 1987

Scanned with OKEN Scanner

# Cuprins





Scanned with OKEN Scanner

# INTRODUCERE

Teoria sistemelor 1D, dezvoltată pe baza modelelor de stare, a fost reformulată recent, utilizîndu-se reprezentarea polinomială, obținută prin transpunerea operațională a ecuațiilor clasice de stare ale unui sistem dinamic. Transferarea imediată a rezultatelor tradiționale din limbajul variabilelor de stare în limbaj polinomial a fost posibilă în momentul în care a fost stabilită conexiunea care există între specificul utilizării algebrei liniare, în cadrul reprezentărilor de stare, și cel al algebrei inelului polinoamelor și al corpului fracțiilor raționale, conexiune pregnant explicitată prin conceptul de echivalent de stare al unei reprezentări polinomiale.

Reprezentările polinomiale 1D operează cu matrice raționale de o singură nedeterminată, ceea ce le limitează aplicabilitatea numai la anumite clase de sisteme.

Dezvoltarea vertiginoasă a unor noi tehnologii a atras după sine apariția unor sisteme diverse și complexe, pentru care caracterizarea clasică, pe baza unei singure nedeterminate, nu mai este suficient de reprezentativă, recurgîndu-se la caracterizări ce utilizează funcții sau matrice raționale, de mai multe variabile complexe.

Analiza și sinteza acestei noi clase de sisteme a necesitat utilizarea unui aparat matematic care să cuprindă teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe, teoria aproximărilor multidimensionale etc. Vom interpreta aceste sisteme ca „sisteme multidimensionale”. În acest cadru un rol important îl joacă sistemele cu două dimensiuni (bidimensionale), așa-numitele sisteme 2D.

Teoria sistemelor 2D a cunoscut un interes crescător, deoarece este legată indisolubil de rezolvarea unor probleme practice, cum ar fi cele care apar în prelucrarea numerică a imaginilor, în seismologie, în magnetism, în toate cazurile în care se operează cu „suprafețe de date”, obținute prin eșantionarea spațială a unei imagini fizice.

În această lucrare autorii au căutat să prezinte o abordare sistemică, unitară, la nivel de caracterizare și de sinteză efectivă a proceselor care sînt descrise prin funcții de transfer de tip bidimensional. Autorii expun, pe de o parte, problematica atît de complexă a caracterizării sistemelor 2D, iar pe de alta, cercetările proprii în această arie nouă de investigație, cu aplicații practice profunde și imediate.

A fost abordată numai problematica sistemelor deterministe 2D, aspectele legate de sistemele stochastice și problemele de estimare urmînd să fie analizate într-o lucrare ulterioară.

Astfel, analiza sistemelor 2D este făcută prin cele două căi cunoscute din teoria sistemelor 1D, reprezentarea polinomială şi reprezentarea pe baza modelelor de stare, pentru că autorii au urmărit să evidenţieze faptul că între aceste două tipuri de reprezentări există o interdependenţă mai profundă şi mai complexă decît în cazul sistemelor clasice. În această privinţă, un exemplu edificator este acela al definirii conceptelor de controlabilitate locală şi modală vis-à-vis de acela de minimalitate. Dacă proprietăţile locale de controlabilitate şi de observabilitate pot fi definite prin extinderea teoriei clasice a sistemelor (pe baza unui model de stare propus), aceasta nu implică şi minimalitatea sistemului, pe de o parte, iar pe de altă parte, nu pot asigura un algoritm de reducere la un sistem controlabil sau observabil.

Minimalitatea modelului unui sistem 2D poate fi asigurată, dacă se apelează la controlabilitatea şi observabilitatea modale, definite — de data asta — pe baza proprietăţilor de coprimitate ale unor matrice polinomiale în două variabile. În ceea ce priveşte sinteza părţii controlabile (observabile) a sistemului, aceasta se poate face dacă se adoptă o reformulare a conceptelor locale, separat pe stările verticale şi orizontale ale sistemului (partiţionarea matricelor de controlabilitate şi observabilitate).

Urmărind extinderea noţiunilor de la sistemele clasice 1D , sînt propuse atît definirea noilor condiţii de unimodularitate şi echivalenţe în cazul bidimensional, cît şi cea a algoritmilor de obţinere a formelor particulare — matriceale, de tipurile Smith, Hermite, superior (inferior) triunghiulară, atît de utile în analiza şi sinteza unor sisteme de tipul 2D.

Reprezentarea prin polinoame în două nedeterminate a şirurilor de date 2D permite definirea sistemelor bidimensionale cauzale şi caracterizarea intrare-ieşire originală a acestor sisteme.

Pentru o mai bună înţelegere a celor ce urmează, este bine de specificat că s-au considerat sistemele 2D discrete şi aceasta din două motive : primul ar fi provenienţa lor naturală direct din aplicaţii (fapt ce nu exclude, evident, categoria sistemelor 2D continue), iar al doilea, faptul că însăşi teoria sistemelor liniare 1D preferă ca domeniu operant sistemele discrete.

Abordarea polinomială a sistemelor bidimensionale a necesitat mai întîi transpunerea „suprafeţelor de date" într-o formă algebrică pretabilă instrumentului algebrei propriu-zise. Pentru aceasta, dată fiind natura discretă a sistemelor, s-a recurs la transformatele $z$ bidimensionale (2D) şi implicit la operarea cu polinoame (matrice polinomiale) în două nedeterminate $z_1$ şi $z_2$.

În ceea ce priveşte teoria în variabile de stare, aceasta a cunoscut o dezvoltare rapidă în momentul în care au fost propuse primele modele ce operează în spaţiul stărilor. Este de notat faptul că în literatura de specialitate au fost „lansate" mai multe structuri de modele de stare, fiecare cu avantajele şi dezavantajele sale, şi, cel puţin pînă în prezent, nu s-a ajuns la un consens general în această privinţă (o analiză comparativă a acestor modele este prezentată în capitolul 2, din partea I).

În lucrarea de faţă se utilizează un model de stare propus de G. Roesser, în anul 1975, fiindcă, după opinia noastră, este modelul care întruneşte două calităţi esenţiale :

a) reprezintă o extindere naturală a modelelor sistemelor liniare 1D la cazul 2D ;

b) există o corespondenţă bijectivă între reprezentările de stare şi funcţiile de transfer, deduse pe baza teoriei polinomiale.

Problema realizării unei funcţii de transfer raţionale, bidimensionale poate fi rezolvată totdeauna pentru modelele de stare de tipul Roesser. Astfel, deşi nu există pînă în prezent o tehnică precisă de obţinere a unor realizări de ordin minimal, avînd coeficienţi reali, este posibilă obţinerea unor realizări reale de ordin relativ redus ($2n + m$ ; $n + 2m$), în funcţie de dimensiunile vectorilor de stare orizontală şi verticală. Acest rezultat poate fi atins dacă se utilizează procedeul realizării la două nivele.

Trebuie remarcat faptul că algoritmul de realizare la două nivele permite atît transferarea unor proceduri de analiză şi sinteză de la sistemele unidimensionale la cele bidimensionale, cît şi abordarea problematicii alocării polilor prin reacţie. În această privinţă, în lucrare este prezentat un algoritm de stabilizare a sistemelor 2D instabile, prin anihilarea polului care produce instabilitatea, algoritm testat practic ; rezultatele obţinute validează justeţea (corectitudinea) raţionamentelor teoriei.

Metodologia originală de sinteză a sistemelor 2D, pe baza datelor de intrare-ieşire, poate fi aplicată atît în ceea ce priveşte prelucrările numerice de imagini, cît şi în anumite probleme legate de recunoaşterea formelor.

Cadrul general de construcţie a întregii cărţi a fost conceput pe baza premisei că în prezent nu există în ţară o lucrare care să trateze problematica atît de complexă a sistemelor 2D discrete.

Ca atare, lucrarea îşi propune să prezinte, în prima sa parte, o formalizare a acestor sisteme, împreună cu implicaţiile ce decurg din aceste formalizări, iar în partea a doua aspecte ale analizei asistate de calculator a sistemelor 2D-elemente de un real folos pentru cercetătorii interesaţi de acest domeniu.

Ideile care au stat la baza elaborării lucrării au fost :

a) inventarierea celor mai recente şi complete formulări ale problemelor, cadru privind algebra polinoamelor şi matricelor polinomiale 2D ;

b) selectarea şi rezolvarea problemelor-cadru ale analizei şi sintezei sistemice ale sistemelor 2D ;

c) prezentarea problematicii generale a analizei asistate de calculator, prin simulare, a sistemelor şi a soluţiilor specifice cazului sistemelor 2D ;

d) evidenţierea facilităţilor pe care le oferă pentru studiul acestor sisteme mediul de simulare SIM2D — set de programe specializat 2D, care, după opinia autorilor, este primul de acest tip în literatura de specialitate ;

e) oferirea unei liste bibliografice de referinţă.

Pentru a veni în sprijinul celor mai puţin familiarizaţi cu terminologia folosită în lucrare, în anexe sînt prezentate elemente cu privire la descrierea algoritmilor în pseudocod şi, respectiv, un index al termenilor utilizaţi.

Materialul prezentat constituie rezultatul unei colaborări fructuoase între specialiştii din domenii conexe : automatică, matematică şi calculatoare. Multe dintre rezultate sînt originale în literatura de specialitate ; ele au fost parţial publicate, pe de o parte în reviste din ţară şi din străinătate, iar pe de altă parte, în teze de doctorat.

Lucrarea se adresează cercetătorilor, inginerilor şi studenţilor interesaţi de cunoaşterea acestei discipline, de o deosebită actualitate, care este teoria sistemelor.

Scanned with OKEN Scanner

Autorii își exprimă speranța că cititorul va găsi în materialul expus o inițiere accesibilă în gama de probleme ale unui domeniu de cercetare relativ tînăr, cu largi posibilități de dezvoltare și de aplicare.

Autorii țin să aducă cele mai calde mulțumiri colegilor de la Facultatea Automatică pentru observațiile și sugestiile formulate pe parcursul elaborării lucrării, și în mod deosebit prof. dr. ing. Vlad Ionescu, pentru tot sprijinul acordat în definitivarea materialului prezentat.

Autorii își exprimă și pe această cale recunoștința pentru climatul deosebit de favorabil, propice activității de cercetare științifică fundamentală și aplicativă, creat de conducerea Facultății Automatică din Institutul Politehnic București.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

# Sisteme 2D. Formulare algebrică și noțiuni de bază

## 1. STRUCTURI ALGEBRICE ȘI MATRICE POLINOMIALE

### 1.1. Inele și corpuri

#### 1.1.1. Inele și ideale

*Definiția 1.1.* O mulțime nevidă $A$ împreună cu două legi de compoziție pe $A$ notate aditiv și respectiv multiplicativ se numește *inel* dacă sînt satisfăcute următoarele axiome:

$A_1$ $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall\, x, y\, z \in A,$

$A_2$ $x + y = y + x, \quad \forall\, x, y \in A,$

$A_3$ $\exists\, 0 \in A,$ astfel încît $x + 0 = x, \ \forall\, x \in A,$

$A_4$ $\forall x \in A, \exists\, -x \in A,$ astfel încît $x + (-x) = 0,$

$A_5$ $x(y\,z) = (x\,y)\,z, \quad \forall\, x, \ y, z \in A,$

$A_6$ $x(y + z) = xy + xz, \quad \forall\, x, \ y, z \in A,$

$A_7$ $(y + z)\,x = yx + zx, \quad \forall\, x, \ y, z \in A.$

Deci $A$ este inel dacă împreună cu adunarea formează grup abelian, împreună cu înmulțirea formează semigrup și înmulțirea este distributivă față de adunare.

Dacă înmulțirea în $A$ are un element neutru, acest element se notează de obicei cu 1 și se numește *elementul unitate* al lui $A$; în acest caz se spune că $A$ este inel unitar sau inel *cu element unitate.*

Dacă înmulțirea este comutativă ($xy = yx$) se spune că $A$ este *inel comutativ.*

Dacă pentru un element $x$ al inelului $A$ există $x' \in A$, astfel încît $xx' = x'x = 1$ se spune că $x$ este inversabil; elementul $x'$ se numește *inversul* lui $x$ și se notează cu $x^{-1}$. Un element $x$ al inelului $A$ se numește *divizor al lui zero la stînga (la dreapta)* dacă există $y \in A$, $y \neq 0$, astfel încît $xy = 0$ ($yx = 0$). Dacă $x = 0$ este singurul divizor al lui zero în $A$, spunem că $A$ *nu are divizori ai lui zero.* Pe o mulțime cu un singur element $x$ se poate defini o singură structură de inel, în care $x$ este elementul nul și elementul unitate; acest inel se numește inelul nul.

*Definiția 1.2.* nU inel nenul, comutativ, cu element unitate și care nu are divizori ai lui zero se numește *inel integru.*



Scanned with OKEN Scanner

*Exemple.* 1.1. *Inelul întregilor raționali.* Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ împreună cu adunarea și înmulțirea este inel integru.

1.2. Mulțimea funcțiilor reale de variabilă reală împreună cu adunarea și înmulțirea definite prin $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ este inel comutativ cu element unitate; acesta este funcția $e$ definită prin $e(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funcția $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$ este divizor al lui zero, deoarece pentru $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \\ c, & x \notin [a, b] \end{cases}$, $(fg)(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $fg = 0$ (funcția nulă).

1.3. Mulțimea funcțiilor polinomiale cu coeficienți reali $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ este inel integru.

1.4. Dacă $A$ este inel, mulțimea $M_n(A)$ a matricelor de ordin $n$ cu elemente din $A$ (vezi 1.3.2) este inel necomutativ cu divizori ai lui zero. De exemplu, în $M_2(\mathbb{Z})$, pentru $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ și $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ se observă că $XY = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = YX$, deci înmulțirea nu este comutativă; matricea $Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ este divizor al lui zero, la stînga, deoarece pentru $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ se obține $ZU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_2$ (matricea nulă de ordinul doi).

Dacă $A$ este inel unitar, $M_n(A)$ este de asemenea inel unitar, elementul neutru față de înmulțire fiind matricea unitate de ordin $n$,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

*Definiția 1.3.* O submulțime nevidă $B$ a inelului $A$ se numește *subinel* al inelului $A$, dacă legile de compoziție induse pe $B$ de cele ale lui $A$ formează împreună cu $B$ un inel.

Se poate arăta ușor că $B$ este subinel al lui $A$, dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in B$ rezultă $x - y \in B$ și $xy \in B$, ceea ce se poate scrie sub forma $B - B \subset B$ și $BB \subset B$.

*Exemple.* 1.5. Inelul funcțiilor polinomiale cu coeficienți reali (exemplul 1.3) este subinel al inelului funcțiilor reale (exemplul 1.4).

1.6. Mulțimea $n\mathbb{Z} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$, unde $n \in \mathbb{N}$, este subinel al lui $\mathbb{Z}$, deoarece $nm - nm' = n(m - m') \in n\mathbb{Z}$ și $(nm)(nm') = n(mnm') \in n\mathbb{Z}$. Se poate arăta că orice subinel al lui $\mathbb{Z}$ este de forma $n\mathbb{Z}$.

*Definiția 1.4.* O submulțime $I$ a inelului $A$ se numește *ideal stîng* (*drept*) al lui $A$, dacă $I$ este subgrup al grupului aditiv al lui $A$ și pentru orice $a \in I$ și $x \in A$ rezultă $xa \in I$ (respectiv $ax \in I$). Dacă $I$ este în același timp ideal stîng și drept, el se numește *ideal bilateral*.

Rezultă că $I$ este ideal stîng (drept) al lui $A$ dacă și numai dacă $I - I \subset I$ și $AI \subset I$ $(IA \subset I)$. Atunci și $II \subset I$, deci orice ideal este subinel al lui $A$,

reciproca nefiind adevărată. Cînd $A$ este inel comutativ, idealele la stînga, la dreapta și bilaterale coincid și vor fi numite doar *ideale*.

*Exemple.* 1.7. Pentru orice element $a$ al unui inel $A$ mulțimea $Aa$ (respectiv $aA$) este ideal stîng (drept) al lui $A$. Apoi $\{0\}$ și $A$ sînt evident ideale ale lui $A$, numite ideale *improprii*. Orice alt ideal al lui $A$ se va numi ideal *propriu*.

1.8. Fie $A$ un inel unitar și $M$ o submulțime a sa. Atunci mulțimea sumelor finite de forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ cu $x_i \in A$, $m_i \in M$ este ideal stîng al lui $A$, numit *idealul generat de mulțimea* $M$. Se poate arăta că acest ideal este intersecția tuturor idealelor stîngi ale lui $A$ care conțin mulțimea $M$. Dacă inelul $A$ este și comutativ, atunci idealul generat de un singur element $a$ ($Aa = aA$) se notează $(a)$ și se numește *ideal principal*.

1.9. Subinelul $n\mathbb{Z}$ (exemplul 1.6) este și ideal al lui $\mathbb{Z}$ deoarece $(nm)p = n(mp) \in n\mathbb{Z}$, $\forall m, p \in \mathbb{Z}$. Evident $n\mathbb{Z}$ este ideal principal.

**Propoziția 1.1.** Orice relație de echivalență compatibilă cu structura unui inel $A$ este de forma $x-y \in I$, unde $I$ este ideal bilateral al lui $A$. Mulțimea factor a lui $A$ prin această relație este un inel.

*Demonstrație.* Fie $\equiv$ o relație de echivalență compatibilă cu structura de inel a lui $A$, ceea ce înseamnă că din relațiile $x \equiv x'$ și $y \equiv y'$ rezultă $x + y \equiv x' + y'$ și $xy \equiv x'y'$. Atunci din $x \equiv y$ rezultă $x - y \equiv y - y$ adică $x - y \equiv 0$ și reciproc din $x-y \equiv 0$ rezultă $(x-y) + y \equiv 0 + y$ adică $x \equiv y$. Notăm cu $B$ clasa elementelor $x \in A$ cu $x \equiv 0$, deci $x \equiv y$ este echivalentă cu $x-y \in B$.

Din $x, y \in B$, adică $x \equiv 0$ și $y \equiv 0$ și din tranzitivitatea relației $\equiv$ se obține $x \equiv y$, apoi $x-y \equiv 0$, deci $x-y \in B$. Dacă $x \in B$ și $z \in A$, din $x \equiv 0$ și $z \equiv z$ rezultă $xz \equiv 0z = 0$ și $zx \equiv z0 = 0$, deci $xz \in B$ și $zx \in B$. Am arătat că $B$ este ideal bilateral.

Reciproc, fie $I$ un ideal bilateral al lui $A$. Relația $x - y \in I$ este reflexivă, deoarece $x - x = 0 \in I$; simetrică, deoarece din $x-y \in I$ rezultă $y-x = -(x-y) \in I$ și tranzitivă: din $x-y \in I$ și $y-z \in I$ rezultă $x-z = (x-y) + (y-z) \in I$. În plus ea este compatibilă cu structura de inel a lui $A$, deoarece din $x-x' \in I$ și $y-y' \in I$ rezultă $(x+y) - (x'+y') = (x-x') + (y-y') \in I$ și $xy - x'y' = x(y-y') + (x-x')y' \in I$.

Mulțimea factor a lui $A$ în raport cu relația de echivalență $\equiv$ este mulțimea claselor de echivalență ale lui $A$ în raport cu $\equiv$. Notăm clasa elementului $x \in A$ cu $[x]$; legile de compoziție care fac să corespundă claselor $[x]$ și $[y]$ clasele $[x + y]$ și respectiv $[xy]$ (și care sînt bine definite, deoarece din ipoteză rezultă $[x + y] = [x'+y']$, $[xy] = [x'y']$ dacă $[x] = [x']$ și $[y] = [y']$) definesc pe mulțimea factor o structură de inel. Acest inel se numește *inelul factor* al lui $A$ prin idealul bilateral $I$ și se notează $A_{/I}$.

*Exemplul* 1.10. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, inelul factor al lui $\mathbb{Z}$ în raport cu idealul $n\mathbb{Z}$ este un inel comutativ cu $n$ elemente $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ ale cărui legi de compoziție sînt adunarea și înmulțirea modulo $n$.

*Definiția 1.5.* Fie $A$ și $B$ două inele. O aplicație $f : A \to B$ se numește *morfism* (omomorfism) de inele dacă, oricare ar fi $x, y \in A$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ și $f(xy) = f(x) f(y)$. Dacă morfismul $f$ este bijectiv el se numește *izomorfism* și se spune că inelele $A$ și $B$ sînt *izomorfe*.

Se pot verifica următoarele proprietăți:

a) imaginea $f(A)$ este subinel al lui $B$;

b) nucleul $\operatorname{Ker} f$ este ideal bilateral al lui $A$;

c) inelul $f(A)$ este izomorf cu inelul factor $A_{/\operatorname{Ker} f}$; mai precis, dacă



Scanned with OKEN Scanner

notăm cu $\varphi$ surjecţia canonică $\varphi : x \to [x]$ şi cu $\psi$ izomorfismul $\varphi : [x] \to f(x)$, rezultă diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & f(A) \\ & \varphi\searrow \quad \nearrow\psi & \\ & A/_{\mathrm{Ker}\, f} & \end{array}$$

*Definiţia 1.6.* Se numeşte *inel produs* al unei familii $(A_i)_{i\in I}$ de inele, mulţimea $\prod\limits_{i\in I} A_i = \{(x_i)\}_{i\in I}$ cu legile de compoziţie

$$(x_i) + (y_i) \triangleq (x_i + y_i), \quad (x_i)(y_i) \triangleq (x_i y_i).$$

*Exemplul* 1.11. Produsul cartezian $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ cu legile de compoziţie $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ şi $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ este inelul produs al familiei $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Este inel comutativ, cu elementul unitate (1,1) dar nu este inel integru, deoarece are divizori ai lui zero ; de exemplu, pentru $x \neq 0$ şi $y \neq 0$, $(x, 0)(0, y) = (0, 0)$.

### 1.1.2. Divizibilitatea în inele

Fie $A$ un inel.

*Definiţia 1.7.* Se spune că elementul $x \in A$ este un *divizor la stînga* (*la dreapta*) al elementului nenul $y \in A$, sau că $y$ este *multiplu la dreapta* (*la stînga*) al lui $x$, dacă există $z \in A$ astfel încît $xz = y$ (respectiv $zx = y$).

Dacă inelul $A$ este comutativ, divizorii (multiplii) la stînga şi la dreapta coincid şi vor fi numiţi simplu *divizori* (*multipli*). Cînd $x$ este divizor al lui $y$, se spune că $x$ *divide* pe $y$ şi se notează $x|y$. Evident, din $x|y$ şi $y|x$ rezultă $x|z$.

Dacă $A$ este inel unitar, orice element $x\in A$ are divizorii 1 şi $x$, deoarece $x1 = 1x = x$.

*Exemplul* 1.12. În inelul $M_2(\mathbb{Z})$, matricea $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ este divizor la stînga al matricei $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ deoarece $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, dar nu este şi divizor la dreapta. Matricea $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ este divizor şi la stînga şi la dreapta al matricei $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, deoarece

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Observaţia 1.1.* În cele ce urmează, cînd nu se specifică altfel, $A$ va fi inel comutativ cu element unitate ; unele noţiuni pot fi studiate prin analogie şi în inele necomutative, adăugîndu-se denumirile „la stînga" sau „la dreapta". Astfel, în inele necomutative (cum sînt inelele de matrice) vor fi studiaţi divizorii la stînga, elementele relativ prime la stînga etc.

*Definiţia 1.8.* Fie $x, y, z \in A$ ; $z$ se numeşte *divizor comun* al lui $x$ şi $y$, dacă $z|x$ şi $z|y$ ; $z$ se numeşte *multiplu comun* al lui $x$ şi $y$, dacă $x|z$ şi $y|z$.

Un element $d \in A$ se numeşte *cel mai mare divizor comun* (c.m.m.d.c.) al elementelor $x$ şi $y$ şi se notează $(x, y)$, dacă $d$ este divizor comun al lui $x$ şi $y$ şi oricare ar fi alt divizor comun $z$ al lui $x$ şi $y$, $z|d$.



Scanned with OKEN Scanner

Un element $m \in A$ se numeşte *cel mai mic multiplu comun* al lui $x$ şi $y$ şi se notează $[x, y]$, dacă $m$ este multiplu comun al lui $x$ şi $y$ şi oricare ar fi alt multiplu comun $z$ al lui $x$ şi $y$, $m|z$.

Se spune că $x$ şi $y$ sînt *relativ prime*, dacă $(x, y) = 1$.

Se spune că elementele $x, y \in A$ sînt *asociate* şi se notează $x \sim y$, dacă $x|y$ şi $y|x$.

**Propoziţia 1.2.** Într-un inel integru $A$ două elemente $x$ şi $y$ sînt asociate dacă şi numai dacă există $u \in A$, $u$ inversabil, astfel încît $x = uy$.

*Demonstraţie.* Suficienţa rezultă din $x = uy$ şi $y = u^{-1}x$. Reciproc, dacă $x$ şi $y$ sînt asociate, atunci există $a$ şi $b$ în $A$, astfel încît $x = ay$ şi $y = bx$; dacă $x = 0$, rezultă şi $y = 0$, deci condiţia este adevărată, de exemplu cu $u = 1$. Dacă $x \neq 0$, obţinem $x = abx$ sau $x(1-ab) = 0$ şi (neexistînd divizori ai lui zero) $ab = 1$, deci $a$ este inversabil.

**Propoziţia 1.3.** Fie $x \in A$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1) $x \sim 1$;

2) $x$ este inversabil;

3) $x|y \ \forall y \in A$.

*Demonstraţie.* 1. $\Rightarrow$ 2. Din $x \sim 1$ rezultă existenţa lui $u$ inversabil, încît $x = u1 = u$.

2. $\Rightarrow$ 3. Deoarece există $x^{-1} \in A$, $y = x(x^{-1}y)$, deci $x|y \ \forall y \in A$.

3. $\Rightarrow$ 1. Pentru $y = 1$ avem $x|1$ şi cum $1|x$ rezultă $x \sim 1$.

**Propoziţia 1.4.** Fie $x, y \in A$ şi $d$ c.m.m.d.c. al lui $x$ şi $y$. Atunci un element $d'$ este c.m.m.d.c. al lui $x$ şi $y$ dacă şi numai dacă $d$ şi $d'$ sînt asociate.

*Demonstraţie.* Dacă $d$ şi $d'$ sînt c.m.m.d.c. ai lui $x$ şi $y$, din definiţie rezultă $d|d'$ şi $d'|d$. Reciproc, dacă $d'$ este asociat cu $d$, din $d'|d$, $d|x$ şi $d|y$ se obţine $d'|x$ şi $d'|y$, deci $d'$ este divizor comun al lui $x$ şi $y$, iar pentru orice divizor comun $z$ al lui $x$ şi $y$, $z|d$ şi $d|d'$ implică $z|d'$, deci $d'$ este c.m.m.d.c.

**Propoziţia 1.5.** Fie $A$ inel integru, $x, y \in A$, $x, y$ nenule. Dacă $d = (x, y)$ şi $x = dx'$, $y = dy'$, atunci $x'$ şi $y'$ sînt relativ prime.

*Demonstraţie.* Fie $d' = (x', y')$, deci $x' = d'x''$, $y' = d'y''$, de unde $x = dd'x''$, $y = dd'y''$, deci $dd'$ este divizor comun al lui $x$, $y$ şi $dd'|d$, adică $\exists z \in A$ cu $d = dd'z$ sau $d(1-d'z) = 0$. Cum $d \neq 0$, rezultă $d'z = 1$ şi $d'$ este inversabil. Conform propoziţiei 1.3, $d' \sim 1$, deci 1 este c.m.m.d.c. al lui $x'$ şi $y'$.

*Definiţia 1.9.* Fie $A$ inel integru şi $p$ un element nenul şi neinversabil din $A$.

1°. $p$ se numeşte *prim*, dacă din $p|xy$, $x, y \in A$, rezultă $p|x$ sau $p|y$.

2° $p$ se numeşte *ireductibil*, dacă orice divizor al lui $p$ este asociat cu $p$ sau cu 1. În caz contrar $p$ se numeşte *reductibil*.

Legătura dintre cele două noţiuni este dată de următoarea propoziţie.

**Propoziţia 1.6.** Fie $A$ inel integru. Atunci: 1° orice element prim al lui $A$ este ireductibil.

2° Dacă, în plus, pentru orice două elemente $x, y \in A$ există $(x, y)$ în $A$, atunci orice element ireductibil este prim.

*Demonstraţie.* 1° Fie $p$ prim şi $x$ un divizor al său, deci $\exists\, y \in A$, $y \neq 0$, cu $p = xy$. Cum $x|p$ şi $y|p$ şi din ipoteză $p|x$ sau $p|y$, rezultă $x \sim p$ sau $y \sim p$; în al doilea caz, conform propoziţiei 1.2 există $u$ inversabil în $A$ cu $p = uy$.



Scanned with OKEN Scanner

Atunci $uy = xy$, apoi $(u - x)\, y = 0$, $u - x = 0$, de unde $x = u$ şi $x$ este inversabil, deci $x \sim 1$. Rezultă că $x$ este asociat cu $p$ sau cu 1.

2° Arătăm mai întîi că din $(p, x) = 1$ şi $(p, y) = 1$ rezultă $(p, xy) = 1$. Fie $(p, xy) = d$. Din $(p, x) = 1$ obţinem $(py, xy) = y$, dar $d|py$ şi $d|xy$ implică $d|y$; cum $d|p$ şi $(p, y) = 1$ deducem $d|1$, deci $d \sim 1$ sau $(p, xy) = 1$.

Acum fie $p$ ireductibil şi $p|xy$, deci $(p, xy) = p$. Presupunem prin absurd că $p$ nu divide nici pe $x$ nici pe $y$. Rezultă $(p, x) = 1$ şi $(p, y) = 1$, deci $(p, xy) = 1$, de unde $p \sim 1$, ceea ce contrazice faptul că $p$ este ireductibil, deci neinversabil. Prin urmare $p$ divide pe $x$ sau pe $y$ şi deci $p$ este prim.

Din propoziţia 1.6 a apărut necesitatea stabilirii proprietăţilor pe care trebuie să le aibă un inel $A$, încît pentru orice două elemente ale sale să poată fi determinat cel mai mare divizor comun ; de exemplu, problema poate fi rezolvată dacă în $A$ funcţionează algoritmul lui Euclid.

*Definiţia 1.10.* Un inel integru $A$ se numeşte *inel euclidian*, dacă există o funcţie $g : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile :

1°. $\forall\, x, y \in A$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $g(xy) \geqslant g(x)$.

2°. $\forall\, x, y \in A$, $y \neq 0$, există $q, r, \in A$, astfel încît $x = qy + r$ şi $g(r) < g(y)$ sau $r = 0$ (teorema împărţirii cu rest).

*Observaţia 1.2.* Dacă $x|y$, atunci $g(x) \leqslant g(y)$, deoarece $y = xz$ şi $g(y) = g(xz) \geqslant g(x)$. Dacă $x \sim y$, rezultă $g(x) \leqslant g(y)$ şi $g(y) \leqslant g(x)$, deci $g(x) = g(y)$. Apoi $g(x) = g(x \cdot 1) \geqslant g(1)$ ; notăm $g^* = g(1) = \inf\limits_{x \in A} g(x)$. Rezultă din propoziţia 1.2 că orice element inversabil $u$ are proprietatea $g(u) = g^*$.

**Propoziţia 1.7.** Într-un inel euclidian oricare două elemente au un c.m.m.d.c.

*Demonstraţie.* C.m.m.d.c. va fi determinat prin algoritmul lui Euclid. Fie $x, y \in A$ şi $g(x) \geqslant g(y)$. Aplicăm succesiv teorema împărţirii cu rest, 2° :

$$\begin{aligned}
x &= q_1 y + r_1 & \quad g(r_1) &< g(y),\\
y &= q_2 r_1 + r_2 & \quad g(r_2) &< g(r_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k & \quad g(r_k) &< g(r_{k-1}),\\
r_{k-1} &= q_{k+1} r_k & \quad (\text{deci } r_{k+1} &= 0).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Dacă nu ar exista un $r_{k+1}$ nul, s-ar obţine un şir de numere naturale strict descrescător, $g(y) > g(r_1) > g(r_2) > \dots$, absurd. Algoritmul se încheie deci după un număr finit de paşi şi c.m.m.d.c. al numerelor $x$ şi $y$ este ultimul „rest" $r_k$.

Considerînd relaţiile (1.1) succesiv de la ultima la prima, se obţine că $r_k$ este divizor al lui $r_{k-1}$, apoi al lui $r_{k-2}$ şi în final al lui $y$ şi $x$. Tot din (1.1), începînd cu prima relaţie, se observă că orice divizor comun $z$ al lui $x$ şi $y$ divide pe $r_1$, apoi pe $r_2$ ş.a.m.d., $z$ divide pe $r_k$, adică $r_k$ este c.m.m.d.c. al lui $x$ şi $y$.

**Corolarul 1.1.** Într-un inel euclidian oricare două elemente au un c.m.m.m.c.

*Observaţia 1.3.* Noţiunile de c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. se pot extinde de la două la $n$ elemente. Prin inducţie rezultă existenţa lor pentru oricare $n$ elemente într-un inel euclidian.

Din propoziţiile 1.6 şi 1.7 rezultă că într-un inel euclidian un element este prim, dacă şi numai dacă este ireductibil. O proprietate importantă a inelelor euclidiene este următoarea.

**Propoziția 1.8.** Într-un inel euclidian orice ideal este principal.

*Demonstrație.* Fie $I$ un ideal al inelului euclidian $A$. Dacă $I = (0)$, $I$ este ideal principal. Dacă $I \neq (0)$, fie $a \in I$ elementul nenul cu $g(a) < g(x)$, pentru orice $x$ nenul din $I$. Fie un $x$ arbitrar din $I$. Din teorema împărțirii cu rest, există $q, r \in A$, încît $x = qa + r$. Dacă $r \neq 0$, atunci $g(r) < g(a)$; dar $qa \in I$, $x \in I$ implică $r = x - qa$ este în $I$, ceea ce contrazice alegerea lui $a$. Rezultă $r = 0$, adică $x = qa$ sau $I \subset Aa$. Din definiția idealelor, $Aa \subset I$, deci $I = Aa\ [= (a)]$.

*Observația 1.4.* Și în inele necomutative pot fi obținute rezultate asemănătoare. Astfel, dacă într-un inel necomutativ au loc teoreme de împărțire cu rest la stînga și la dreapta,

$$x = q_1 y + r_1 = y q_2 + r_2,\ g(r_1) < g(y),\ g(r_2) < g(y),$$

atunci cu algoritmul lui Euclid pot fi determinați c.m.m.d.c. la stînga, și, respectiv, la dreapta pentru oricare două elemente din inel. Orice ideal la stînga $I_s$ (la dreapta $I_d$) este de forma $I_s = Aa(I_d = aA)$ pentru un $a \in I_s$ $(I_d)$ (adică este idealul multiplilor la stînga (la dreapta)); orice ideal bilateral $I$ este idealul elementelor care sînt multipli atît la stînga, cît și la dreapta ai unui element $a \in I : I = Aa = aA$. În particular, $A$ fiind evident ideal sting al său, există $a \in A$, încît $A = Aa$, atunci $a$ însuși este de forma $a = ea$, pentru $e \in A$; dar $A$ este și ideal drept, deci $A = aA$ și orice element $x \in A$ este de forma $x = ax'$; obținem $ax' = eax'$, adică $x = ex$, pentru orice $x \in A$, deci $A$ are element unitate la stînga. Analog va rezulta că inelul $A$ are și unitate la dreapta $e'$. Dar cum $e = ee' = e'$, $e$ este elementul unitate al inelului $A$.

*Definiția 1.11.* Un inel integru se numește *inel principal*, dacă orice ideal al său este principal.

Conform propoziției 1.8, orice inel euclidian este inel principal.

*Exemplul 1.13.* $\mathbb{Z}$ este inel euclidian cu funcția $g(x) = |x|$ și deci este inel principal; într-adevăr, toate idealele sale sînt de forma $n\mathbb{Z} = (n)$ cu $n \in \mathbb{N}$.

**Propoziția 1.9.** Fie $A$ un inel principal. Atunci $d$ este c.m.m.d.c. al elementelor $x, y \in A$, dacă și numai dacă $Ax + Ay = Ad$.

*Demonstrație.* Dacă $d = (x, y)$, avem $x = x'd$, $y = y'd$, deci pentru orice $z \in Ax + Ay, z = z'x + z''y$, rezultă $z = (z'x' + z''y')\,d \in Ad$ sau $Ax + Ay \subset Ad$. Pe de altă parte, $Ax + Ay$ este ideal al lui $A$, deci este principal și fie $a$ elementul său generator : $Ax + Ay = (a)$; evident $x \in (a)$, $y \in (a)$, de unde $a$ este divizor comun al lui $x$ și $y$, deci $a|d$. Atunci $Ad \subset (a) = Ax + Ay$.

Invers, dacă pentru un $d \in A$, $Ax + Ay = Ad$, avem $x \in Ad$ și $y \in Ad$, deci $d$ este divizor comun al lui $x$ și $y$; apoi $d \in Ax + Ay$, adică $\exists a, b \in A$ cu $d = ax + by$; de aici, orice divizor comun al lui $x$ și $y$ este și divizor al lui $d$, deci $d = (x, y)$.

Din demonstrația propoziției 1.9 rezultă următoarele.

**Corolarul 1.2.** Fie $A$ un inel principal; pentru oricare două elemente $x$, $y \in A$ există un c.m.m.d.c. $d$ și elementele $a$, $b \in A$, astfel încît

$$d = ax + by, \tag{1.2}$$

**Corolarul 1.3** (identitatea lui Bézout). Fie $A$ un inel principal. Atunci $x,y \in A$ sînt prime între ele, dacă și numai dacă există $a$, $b \in A$, astfel încît

$$ax + by = 1. \tag{1.3}$$

*Demonstrație.* Necesitatea se obține din corolarul anterior, cu $d = 1$. Invers, dacă $ax + by = 1$ și $d' = (x, y)$, atunci $d'|1$, de unde $d' \sim 1$.

O categorie importantă de inele este cea a inelelor cu descompunere unică în factori primi.

*Definiția 1.12.* Un inel integru se numește ***inel factorial***, dacă orice element neinversabil și nenul al său se descompune într-un produs finit de elemente prime.

Se poate arăta că inelele factoriale au următoarele proprietăți [1]:

— orice două elemente au un c.m.m.d.c.;

— un element este prim, dacă și numai dacă este ireductibil;

— descompunerea oricărui element neinversabil și nenul în elemente prime este unică, abstracție făcînd de ordinea factorilor și de o asociere a lor.

**Propoziția 1.10.** Orice inel principal este inel factorial.

*Demonstrație.* Fie $A$ un inel principal; presupunem prin absurd că există $x \in A$ neinversabil și nenul care nu se descompune într-un produs finit de elemente prime (sau ireductibile, conform propoziției 1.6). Deci $x$ este reductibil, adică $x = x_1\bar{x}_1$, unde $x_1$, $\bar{x}_1$ nu sînt asociate cu $x$ sau cu 1; dacă $x_1$ și $\bar{x}_1$ s-ar descompune într-un produs finit de elemente ireductibile, atunci și $x$ ar avea această proprietate, ceea ce contrazice ipoteza; deci cel puțin un element nu este produs finit; fie acesta $x_1$ și reluăm raționamentul: $x_1 = x_2\bar{x}_2$ etc.

Obținem un șir infinit de elemente neinversabile și nenule $x_0 = x$, $x_1$, $x_2$, ... în care $x_i = x_{i+1}\bar{x}_{i+1}$ și $x_i$ nu este asociat cu $x_{i+1}$, prin urmare $x_i \in x_{i+1}A$ și $x_iA$, $i \in \mathbb{N}$ este un șir crescător de ideale ale lui $A$,

$$x_i A \subset x_{i+1} A, \quad x_i A \neq x_{i+1} A \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Fie acum $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} x_i A$; dacă $x, y \in I$, $\exists j, k$, cu $x \in x_j A$, $y \in x_k A$; dacă $j \leq k$, $x, y \in x_k A$ și $x_k A$ ideal implică $x - y \in x_k A$, $ax \in x_k A$ $\forall a \in A$, deci $x - y \in I$ și $ax \in I$; $I$ este ideal și din ipoteză ideal principal: $\exists z \in A$ cu $I = zA$. Fie $n$ cu $z \in x_n A$; atunci $x_{n+1} A \subset I = zA \subset x_n A$, ceea ce contrazice (1.4).

### 1.1.3. Corpuri

*Definiția 1.13.* Un inel $K$ se numește *corp*, dacă mulțimea elementelor nenule din $K$ este grup în raport cu legea indusă de înmulțirea din $K$.

Rezultă din definiție existența în $K$ a elementului unitate 1 și existența inversului $x^{-1}$, pentru orice element nenul $x$. Dacă înmulțirea este comutativă, atunci corpul este *comutativ*. Ca și în cazul inelelor, o submulțime nevidă $L$ a corpului $K$ se numește *subcorp* al lui $K$, dacă legile de compoziție induse pe $L$ de cele ale lui $K$ formează împreună cu $L$ un corp. Se poate arăta echivalența acestei definiții cu condițiile: oricare ar fi $x, y \in L$, $x - y \in L$ și dacă $y \neq 0$ și $xy^{-1} \in L$. Se mai spune despre corpul $K$ că este o *extindere* a corpului $L$.

**Propoziția 1.11.** Un inel unitar nenul $K$ este corp, dacă și numai dacă singurele sale ideale la stînga (respectiv la dreapta) sînt (0) și $K$.

*Demonstrație.* Dacă $I$ este ideal la stînga al corpului $K$ și $I \neq (0)$, fie $x \in I$, $x \neq 0$. Atunci $1 = x^{-1}x \in I$ și $K = K1 \subset I$, de unde $I = K$. Invers, dacă (0) și $K$ sînt singurele ideale la stînga ale lui $K$, fie $x \in K$, $x \neq 0$; atunci $Kx$ este ideal la stînga $\neq (0)$, deci $Kx = K$. Rezultă existența unui $x' \in K$ nenul,

incît $x'x = 1$ şi (repetînd raţionamentul) existenţa unui $x'' \in K$, încît $x''x' = 1$. Atunci $xx' = 1xx' = x''x'xx' = x''1x' = x''x' = 1$, deci $x'$ este inversul lui $x$.

*Definiţia 1.14.* Un ideal la stînga (la dreapta) $I$ al unui inel $A$ se numeşte *ideal maximal*, dacă este propriu şi nu este inclus în nici un alt ideal propriu la stînga (la dreapta) al lui $A$.

**Propoziţia 1.12.** Fie $A$ un inel unitar şi $I$ un ideal bilateral al lui $A$. Inelul factor $A_{/I}$ este corp, dacă şi numai dacă $I$ este ideal la stînga maximal al lui $A$.

*Demonstraţie.* $A_{/I}$ este inel unitar (elementul unitate este clasa $[1]$). Fie $I$ ideal la stînga maximal al lui $A$ şi fie $L$ un ideal la stînga al lui $A_{/I}$; sau $L = (0)$ sau dacă nu, considerăm idealul la stînga $L' = \varphi^{-1}(L)$, unde $\varphi$ este surjecţia canonică $\varphi(x) = [x]$; cum $\varphi(x) = [0]$, $\forall\, x \in I$, rezultă $I \subset L'$ şi evident $L'$ este ideal; atunci $L' = A$ şi $L = \varphi(L') = \varphi(A) = A_{/I}$, deci singurele ideale ale lui $A_{/I}$ sînt $(0)$ şi $A_{/I}$; conform propoziţiei anterioare, $A_{/I}$ este corp. În mod asemănător se demonstrează şi implicaţia inversă.

O problemă importantă este cea a scufundării unor anumite inele în corpuri, pentru a fructifica proprietăţile acestora. Construcţia care urmează va conduce în final la determinarea corpului fracţiilor pentru inele integre. Pentru început să considerăm un inel comutativ şi unitar $A$ şi o submulţime $M$ cu proprietăţile: $1 \in M$ şi $x, y \in M \Rightarrow x, y \in M$; $M$ se numeşte *sistem multiplicativ* din $A$. Deşi construcţia se poate face în general, vom considera un sistem multiplicativ $M$ care nu conţine divizori ai lui zero.

În produsul cartezian $A \times M$ relaţia binară

$$(x, m) \sim (x', m'), \text{ dacă şi numai dacă } xm' = x'm$$

este relaţie de echivalenţă ($1°(x, m) \sim (x, m)$, deoarece evident $xm = xm$. $2°$ $(x, m) \sim (x', m') \Rightarrow x'm = xm'$, deci $(x', m') \sim (x, m)$. $3°$ dacă $(x, m) \sim (x', m')$ şi $(x', m') \sim (x'', m'')$, adică $xm' = x'm$ şi $x'm'' = x''m'$, prin înmulţirea relaţiilor cu $m''$ şi, respectiv, $m$, obţinem, folosind comutativitatea din $A$ şi faptul că $m'$ nu este divizor al lui zero: $xm'm'' = x'mm'' = x''m'm \Rightarrow xm'' = x''m$, adică $(x, m) \sim (x'', m'')$).

Considerăm mulţimea factor $(A \times M)_{/\sim}$ şi notăm clasa de echivalenţă a perechii $(x, m)$ cu $\frac{x}{m}$. Pe această mulţime definim adunarea şi înmulţirea astfel:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{xn + ym}{mn}; \quad \frac{x}{m} \cdot \frac{y}{n} = \frac{xy}{mn}.$$

Trebuie să verificăm că aceste definiţii sînt corecte, deci operaţiile nu depind de reprezentanţii claselor. Fie $\frac{x}{m} = \frac{x'}{m'}$, adică $(x, m) \sim (x', m')$ sau $xm' = x'm$; atunci succesiv $xm'n = x'mn$, $xm'n + mym' = xmn + mym'$, $(xn + ym)\, m'n = (x'n + ym')\, mn$, adică

$$\frac{xn + ym}{mn} = \frac{x'n + ym'}{m'n}.$$

Apoi din $xm' = x'm$ obţinem $xym'n = x'ymn$, deci

$$\frac{xy}{mn} = \frac{x'y}{m'n}.$$

Analog se arată că operațiile nu depind de reprezentanții celei de a doua clase. Se verifică ușor asociativitatea și comutativitatea celor două operații, precum și distributivitatea înmulțirii față de adunare; de exemplu

$$\frac{x}{m}\left(\frac{y}{n}+\frac{z}{p}\right)=\frac{x}{m}\,\frac{yp+zn}{np}=\frac{x}{m}\,\frac{y}{n}+\frac{x}{m}\,\frac{z}{p}.$$

Elementul nul este clasa (0,1) (care coincide cu toate clasele $(0, m)$), opusul clasei $(x, m)$ este clasa $(-x, m)$, adică $-\frac{x}{m}=\frac{-x}{m}$. Elementul unitate este clasa (1,1).

Deci mulțimea factor $(A \times M)/_\sim$ este un inel comutativ cu element unitate, numit inelul *fracțiilor lui A cu numitori în mulțimea M.*

Considerăm aplicația $s : A \to (A \times M)/_\sim$, definită prin $s(x) = \frac{x}{1}$ și numită *aplicația canonică* a lui $A$ în inelul său de fracții; $s$ este omomorfism de inele,

$$s(x+y)=\frac{x+y}{1}=\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=s(x)+s(y),$$

$$s(xy)=\frac{xy}{1}=\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}=s(x)\,s(y).$$

Nucleul lui $s$ este $\text{Ker } s=\left\{x\in A \mid \frac{x}{1}=\frac{0}{1}\right\}=\{0\}$, deci $s$ este injectiv. Rezultă că inelul $A$ este izomorf cu subinelul $s(A)=\left\{\frac{x}{1}\,\middle|\, x\in A\right\}$ al inelului fracțiilor lui $A$ cu numitori în $M$.

Mulțimea elementelor lui $A$ care nu sînt divizori ai lui zero este sistem multiplicativ (1 nu este divizor al lui zero și dacă $x, y$ nu sînt divizori ai lui zero, atunci nici $xy$ nu este divizor al lui zero: dacă ar fi, ar exista $z \neq 0$, cu $xyz = 0$, iar $yz \neq 0$, deci $x$ ar fi divizor al lui zero). Inelul de fracții în raport cu acest sistem multiplicativ se numește *inelul total de fracții* al lui $A$.

**Propoziția 1.13.** Dacă $A$ este inel integru, inelul total de fracții este corp și se numește *corpul fracțiilor* lui $A$.

*Demonstrație.* Dacă $A$ este inel integru, sistemul multiplicativ al nondivizorilor lui zero este mulțimea elementelor nenule ale lui $A$. Atunci, orice element nenul al inelului fracțiilor este de forma $\frac{x}{m}$ cu $x \neq 0$ și $m \neq 0$, de unde și $\frac{m}{x}$ este în acest inel și $\frac{x}{m}\,\frac{m}{x}=\frac{xm}{xm}=\frac{1}{1}$, deci orice element nenul are inversul său.

În concluzie, pentru orice inel integru se poate construi un corp care îl conține.

*Exemplul* 1.14. Corpul numerelor raționale $\mathbb{Q}$ este corpul fracțiilor inelului integru $\mathbb{Z}$.



Scanned with OKEN Scanner

## 1.2. Inele de polinoame

### 1.2.1. Serii formale și polinoame

Fie $I$ o mulțime nevidă. Considerăm monoidul produs $\mathbb{N}^I = \{(n_i)_{i \in I} | n_i \in \mathbb{N}, i \in I\}$, cu legea de compoziție $(n_i) + (m_i) = (n_i + m_i)$; fie $M$ partea stabilă a lui $\mathbb{N}^I$, formată din familiile $n = (n_i)$ de suport finit, adică cu $n_i \neq 0$ cel mult pentru un număr finit de indici $i$.

Fie $A$ un inel comutativ și unitar și $A^M$ mulțimea funcțiilor $f : M \to A$. Pe această mulțime definim două legi de compoziție :

1° adunarea (indusă de adunarea din $A$) ; $(f, g) \mapsto f + g$,

$$(f + g)(n) \overset{\Delta}{=} f(n) + g(n);$$

2° înmulțirea : $(f, g) \mapsto fg$.

$$(fg)(n) \overset{\Delta}{=} \sum_{\substack{m,p \\ m+p=n}} f(m)\, g(p), \text{ unde } n = (n_i),\ m = (m_i),\ p = (p_i).$$

În raport cu adunarea, $A^M$ este grup comutativ, elementul nul fiind funcția nulă.

Înmulțirea este asociativă :

$$(f(gh))(n) = \sum_{m+p=n} f(m)\,(gh)(p) = \sum_{m+p=n} f(m)\Big(\sum_{j+k=p} g(j)\, h(k)\Big) =$$

$$= \sum_{m+j+k=n} f(m)g(j)h(k) =$$

$$= \sum_{s+k=n} \Big(\sum_{m+j=s} f(m)g(j)\Big)h(k) = ((fg)h)(n).$$

Elementul neutru față de înmulțire este funcția $e$, definită prin $e(0) = 1$ și $e(n) = 0$, pentru $n \neq 0$, unde $0$ este elementul cu toate componentele nule din $\mathbb{N}^I$ :

$$(fe)(n) = \sum_{m+p=n} f(m)\, e(p) = f(n)\, e(0) = f(n).$$

Se verifică ușor comutativitatea înmulțirii și distributivitatea ei față de adunare. Prin urmare $A^M$ este inel comutativ unitar.

Considerăm aplicația $\varphi : A \to A^M$, definită prin $\varphi(a) = f_a$, unde $f_a(0) = a$ și $f_a(n) = 0$, pentru $n \neq 0$. Evident $\varphi$ este injectivă ; apoi, $f_{a+b}(0) = a + b = f_a(0) + f_b(0)$, $f_{a+b}(n) = f_a(n) + f_b(n) = 0$, pentru $n \neq 0$ ; $f_{ab}(0) = ab = f_a(0) f_b(0)$, $f_{ab}(n) = f_a(n) f_b(n) = 0$, pentru $n \neq 0$, deci $\varphi$ este omomorfism injectiv de inele și putem identifica elementul $a \in A$, cu imaginea sa $f_a \in A^M$($A^M$ va avea o structură de $A$-algebră, cu înmulțirea cu scalari $a\, g \overset{\Delta}{=} f_a\, g$ pentru $a \in A$ și $g \in A^M$).

Pentru fiecare indice $j \in I$ notăm cu $z_j$ funcția din $A^M$ definită prin : $z_j(n^j) = 1$, pentru $n^j = (n_i)$, cu $n_j = 1$ și $n_i = 0$, pentru $i \neq j$, și $z_j(n) = 0$ pentru $n \neq n^j$. Atunci $z_j^2(n) = z_j(n) \cdot z_j(n) = \sum_{m+p=n} z_j(m)\, z_j(k) = z_j(n^j)\, z_j(n^j) = 1$, pentru $n = n^j + n^j$ (adică $n_j = 2$ și $n_i = 0$, pentru $i \neq j$) și $z_j^2$ este 0 în rest ;

$(z_j z_k)(n) = \sum_{m+p=n} z_j(m)\, z_k(p) = z_j(n^j)\, z_k(n^k) = 1$, pentru $n = n^j + n^k$ şi $z_j z_k$ este 0 în rest ş.a.m.d. Atunci orice element $f \in A^M$ se poate scrie în mod unic sub forma

$$f = \sum_{(n_i)\in M} f(n_i) \prod_{i\in I} z_i^{n_i}$$

şi se numeşte *serie formală* în nedeterminatele $z_i$, $i \in I$, iar $A^M$ se numeşte *inelul seriilor formale* în nedeterminatele $z_i$, cu coeficienţi în inelul $A$. Se notează $A^M = A[[z_i]]_{i\in I}$.

Considerăm acum submulţimea lui $A[[z_i]]_{i\in I}$ formată din elementele $f$ pentru care coeficienţii $f(n_i)$ nenuli sînt în număr finit; aceste elemente se numesc *polinoame*; diferenţa şi produsul a două polinoame sînt tot polinoame, deci această submulţime este un subinel al lui $A[[z_i]]$, care se notează $A[z_i]_{i\in I}$ şi se numeşte *inelul polinoamelor* în nedeterminatele $z_i$, $i \in I$, cu coeficienţi în inelul $A$.

În literatura de specialitate notaţia uzuală pentru nedeterminate este $X_i$; aici s-a preferat notaţia $z_i$ pentru apropierea de notaţiile matricelor polinomiale din teoria sistemelor şi din cauza conexiunii dintre transformarea $z$ şi seriile formale. Vom considera în special cazurile în care mulţimea de indici $I$ are un element şi, respectiv, două elemente, cazuri care apar în studiul sistemelor 1D şi 2D; prin analogie pot fi studiate cazurile cînd $I$ are un număr finit sau numărabil de indici.

În cazul $I = \{1\}$, $M = \mathbb{N}^I = \mathbb{N}$ deci $A^M (= A^{\mathbb{N}})$, este mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{N} \to A$; $A^M$ este inel în raport cu adunarea şi înmulţirea definite prin

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n),$$

$$(fg)(n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)\, g(n - m), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Notăm valorile funcţiei $f$ cu $f_n (f(n) = f_n)$, deci $f$ poate fi reprezentată sub forma şirului

$$(f_0, f_1, \ldots f_n, \ldots).$$

Elementul nul este şirul $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, iar elementul neutru faţă de înmulţire este funcţia $e$, unde $e(0) = 1$ şi $e(i) = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots$, adică $e = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Aplicaţia $\varphi : A \to A^{\mathbb{N}}$, $\varphi(a) = (a, 0, \ldots, 0, \ldots)$ este omomorfism injectiv de inele, deci elementele $a \in A$ pot fi identificate cu şirurile $(a, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Dacă notăm cu $z$ elementul $z = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, se observă că $z^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ şi $z^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, 0, \ldots)$, $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că funcţia $f = (f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ din $A^M$ se poate scrie sub forma

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

şi se va numi *serie formală* în nedeterminata $z$ cu coeficienţi în inelul $A$; coeficienţii sînt valorile $f_n$.

Inelul acestor serii formale se notează $A[[z]]$.

Subinelul lui $A[[z]]$, format de elementele $f$ pentru care coeficienţii $f_k$ nenuli sînt în număr finit se notează cu $A[z]$ şi se numeşte *inelul polinoamelor* în nedeterminata $z$, cu coeficienţi în inelul $A$; deci un polinom are forma $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$ sau cu notaţiile de mai sus $f = \sum_{i=0}^{n} f_i z^i$; aceste polinoame intervin în teoria algebrică a sistemelor 1D şi de aceea le vom numi polinoame 1D.

Fie acum $I = \{1, 2\}$, deci $M = \mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$. Pentru $f \in A^M$ notăm $f(n, m) = f_{nm}$; reprezentăm funcţia $f$ sub forma şirului dublu,

$$f = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0m} & \cdots \\ f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1m} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n0} & f_{n1} & \cdots & f_{nm} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Mulţimea $A$ va fi înzestrată cu o structură de inel comutativ cu element unitate prin definirea operaţiilor de adunare şi înmulţire,

$$(f + g)(n, m) = f(n, m) + g(n, m),$$

$$(fg)(n, m) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(i, j)\, g(n - i, m - j).$$

Elementele neutre faţă de adunare şi înmulţire sînt respectiv

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Notăm cu $z_1$ şi $z_2$ funcţiile

$$z_1(n, m) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } (n, m) = (1, 0) \\ 0, \text{ pentru } (n, m) \neq (1, 0) \end{cases} \quad z_2(n, m) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } (n, m) = (0, 1), \\ 0, \text{ pentru } (n, m) \neq (0, 1), \end{cases}$$

adică

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



Scanned with OKEN Scanner

Din definiția înmulțirii se deduce egalitatea

$$z_1^n z_2^m = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots & 0 & 1 & 0 & \dots\dots \\ 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \leftarrow n \quad (\text{coloana } m \downarrow)$$

Folosind și identificarea $a \leftrightarrow \varphi(a)$, unde

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

vom putea scrie elementul $f \in A^M$ sub forma seriei formale (2D),

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} z_1^n z_2^m.$$

Mulțimea $A^M$ se notează $A[[z_1, z_2]]$ și se numește *inelul seriilor formale* în nedeterminatele $z_1$ și $z_2$, cu coeficienți în inelul $A$.

Un element din $A[[z_1, z_2]]$ care are doar un număr finit de coeficienți $f_{nm}$ nenuli se numește *polinom* în nedeterminatele $z_1$ și $z_2$, cu coeficienți în $A$ sau *polinom 2D*; deci un polinom 2D se scrie sub forma

$$f = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & \dots & f_{0m} & 0 & \dots \\ f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1m} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n0} & f_{n1} & \dots & f_{nm} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

sau

$$f = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{ij} z_1^i z_2^j.$$

Polinoamele formează un subinel al inelului seriilor formale, care se numește inelul polinoamelor în nedeterminatele $z_1$ și $z_2$, cu coeficienți în $A$ și se notează $A[z_1, z_2]$.

Să mai observăm că polinomul 2D $f$ de mai sus se poate scrie sub forma $f = \sum_{j=0}^{m} \left( \sum_{i=0}^{n} a_{ij} z_1^i \right) z_2^j$, deci ca un polinom în nedeterminata $z_2$, cu coeficienți $\sum_{i=0}^{n} a_{ij} z_1^i \in A[z_1]$; atunci $f \in A[z_1][z_2]$ și $A[z_1, z_2] = A[z_1][z_2] = A[z_2][z_1]$.



Scanned with OKEN Scanner

Fie $f \in A[z], f = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i$; cel mai mare număr $n$ cu $a_n \neq 0$ se numește *gradul* polinomului $f$ și se notează $\delta(f)$; atunci $f = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ (pentru polinomul nul se consideră $\delta(0) = -\infty$); $f$ se numește monic, dacă $a_n = 1$.

Fie $f, g \in A[z], f = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, g = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i$, deci $\delta(f) = n, \delta(g) = m$; atunci $f + g = \sum_{i=0}^{k} c^i z^i$, unde $k = \max(n, m)$ și $c_i = a_i + b_i$, cu $a_i = 0$ ($b_i = 0$), dacă $i > n$ (respectiv $i > m$). Cum $c_k$ ar putea fi nul, dacă $a_k = - b_k$, obținem

$$\delta(f + g) \leqslant \max\ (\delta(f), \delta(g)). \tag{1.5}$$

Apoi $fg = \sum_{i=0}^{n=m} d_i z^i$, unde $d_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$; în particular, $d_{n+m} = a_n b_m$, deci

$$\delta(fg) \leqslant \delta(f) + \delta(g), \tag{1.6}$$

cu egalitate, dacă $d_{n+m} \neq 0$, deci cînd $a_n$ și $b_m$ nu sînt divizori ai lui zero.

Dacă $f \in A[z_1, z_2]$, deci se scrie unic $f = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} z_1^i z_2^j$, polinomul $a_{ij} z_1^i z_2^j$ se numește *monom*, $a_{ij}$ este *coeficientul monomului* și $i + j$ gradul monomului; *gradul polinomului* $f$ se notează cu $\delta(f)$ și este cel mai mare dintre gradele monoamelor din scrierea lui $f$. Evident, formulele (1.5) și (1.6) rămîn valabile și în acest caz. Dacă considerăm $f \in A[z_1][z_2]$, vom nota $\delta_2(f)$ sau $\delta_{z_2}(f)$ gradul lui $f$ (deci gradul în raport cu variabila $z_2$) și la fel $\delta_1(f) = \delta_{z_1}(f)$ (gradul în raport cu variabila $z_1$).

**Propoziția 1.14.** Dacă $A$ este inel integru, atunci $A[z]$ și $A[z_1, z_2]$ sînt inele integre.

*Demonstrație.* Am văzut mai sus că $A[[z]]$ este inel comutativ cu elementul unitate $e$, unde $e(0) = 1, e(n) = 0$, pentru $n \neq 0$; cu identificarea dedusă din omomorfismul canonic $\varphi$, elementul unitate este $e = 1$. $A[z]$ este subinel al lui $A[[z]]$, deci este și el inel comutativ, iar $1 \in A[z]$. Deoarece $A$ nu conține divizori ai lui zero, dacă $f$ și $g$ sînt polinoame nenule din $A[z]$, atunci $\delta(f) \geqslant 0$, $\delta(g) \geqslant 0$ implică $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g) \geqslant 0$, deci $fg \neq 0$; în concluzie, $A[z]$ nu conține divizori ai lui zero. Am arătat că $A[z]$ este inel integru; atunci și $A[z_1][z_2]$ ($= A[z_1, z_2]$) este inel integru.

**Corolarul 1.4.** Fie $K$ un corp comutativ. Atunci $K[z_1]$ și $K[z_1, z_2]$ sînt inele integre.

În cele ce urmează vom considera numai corpuri comutative.

Am văzut (propoziția 1.3) că elementele inversabile într-un inel comutativ și unitar sînt elementele asociate cu 1, care se mai numesc și unitățile inelului; următoarea propoziție caracterizează unitățile din inelele de polinoame.

**Propoziția 1.15.** Dacă $A$ este inel integru, elementele inversabile din $A$ coincid cu elementele inversabile din $A[z]$ și cu elementele inversabile din $A[z_1, z_2]$.

*Demonstrație.* Fie $a \in A$ inversabil; atunci există $a' \in A$ cu $aa' = 1$; din nou, prin identificarea $a \leftrightarrow \varphi(a)$, putem considera $a \in A[z]$, $a' \in A[z]$, deci $a$

este inversabil și în $A[z]$. Invers, fie $f \in A[z]$ inversabil în $A[z]$, deci există $f' \in A[z]$ cu $ff' = 1$. Din (1.6) $\delta(f) + \delta(f') = \delta(1) = 0$ și $\delta(f) = \delta(f') = 0$, deci $f, f' \in A$ și $f$ este inversabilă în $A$.

Deci în $A[z]$ elementele inversabile se află printre polinoamele de grad 0, iar dacă $K$ este corp, elementele inversabile din $K(z)$ coincid cu polinoamele de grad zero. Tot în inelul $K[z]$ orice polinom de gradul 1 este ireductibil. Într-adevăr, un polinom de gradul 1 $f \in K[z]$ este nenul și neinversabil. Fie $g$ un divizor al lui, deci $\exists\, h \in K[z]$ cu $f = gh$; atunci $1 = \delta(f) = \delta(g) + \delta(h)$; sînt două posibilități : a) $\delta(g) = 1$ și $\delta(h) = 0$, adică $h$ este inversabil în $K[z]$ și din propoziția 1.3 rezultă $g \sim f$; b) $\delta(g) = 0$ și $\delta(h) = 1$, deci $g$ este inversabil și $g \sim 1$.

### 1.2.2. Divizibilitatea în inele de polinoame

**Propoziția 1.16.** Fie $K$ un corp. Atunci $K[z]$ este inel euclidian.

*Demonstrație.* $K[z]$ este inel integru (propoziția 1.14). Definim funcția $g : K[z] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, prin $g(f) = \delta(f)$ (gradul polinomului $f \in K[z] \setminus \{0\}$). Verificăm proprietățile din definiția 1.10.

Fie $f, h \in K[z] \setminus \{0\}$ ; atunci $\delta(h) \geqslant 0$ și $\delta(fh) = \delta(f) + \delta(h) \geqslant \delta(f)$.

Fie $f, h \in K[z]$, $h \neq 0$. Dacă $\delta(h) = 0$, $h \in K$, deci $f = (fh^{-1})h$ și teorema împărțirii cu rest are loc cu $q = fh^{-1}$ și $r = 0$.

În cazul $\delta(h) > 0$ vom proceda prin inducție. Fie $\delta(h) = m > 0$ și $h = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i$, deci $b_m \neq 0$. Dacă $\delta(f) < \delta(h)$ (în particular pentru $\delta(f) = 0$), $f = 0h + f$, deci teorema împărțirii cu rest se verifică cu $q = 0$ și $r = f$; o presupunem adevărată pentru polinoame de grad pînă la $n - 1 \geqslant m$. Fie acum $f \in K[z]$ cu $\delta(f) = n : f = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_n \neq 0$. Polinomul $f_1 = f - a_n b_m^{-1} z^{n-m} h$ are coeficientul lui $z^n$, $a_n - a_n b_m^{-1} b_m = 0$, de unde $\delta(f_1) \leqslant n - 1$ și, conform presupunerii de inducție, $f_1 = q_1 h + r_1$ cu $q_1, r_1 \in K[z]$ și $\delta(r_1) < \delta(h)$. Dar $f = f_1 + a_n b_m^{-1} z^{n-m} h = (q_1 + a_n b_m^{-1} z^{n-m}) h + r_1$ și teorema împărțirii cu rest este adevărată cu $q = q_1 + a_n b_m^{-1} z^{n-m}$ și $r = r_1$.

De aici rezultă că în inelul $K[z]$ al polinoamelor cu coeficienți într-un corp sînt adevărate toate proprietățile inelelor euclidiene, evidențiate în paragraful anterior :

— funcționează algoritmul lui Euclid și oricare două polinoame au un cel mai mare divizor comun ;

— $K[z]$ este inel principal ;

— $d$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor $f$ și $h$, dacă și numai dacă $K[z] f + K[z] h = K[z] d$ ;

— dacă $d = (f, h)$, atunci există $a, b \in K[z]$, încît $d = af + bh$ ;

— polinoamele $f$, $g$ sînt prime între ele dacă și numai dacă există $a, b \in K[z]$, încît $af + bh = 1$ (identitatea lui Bézout) ;

— un polinom este ireductibil dacă și numai dacă este prim.

În toate acestea este esențial ca polinoamele să aibă coeficienți într-un corp ; în caz contrar are loc următoarea propoziție.

**Propoziția 1.17.** Dacă inelul integru $A$ nu este corp, atunci inelul $A[z]$ nu este inel principal.

*Demonstrație.* Deoarece $A$ nu este corp, în $A$ există un element neinversabil $a \neq 0$. Vom arăta că idealul generat de $a$ și $z$ nu este inel principal. Presupunem prin absurd că $I = A[z]\, a + A[z]\, z = (f)$. Deoarece $a, z \in I$, vor exista $g, h \in A[z]$, încît $a = fg$ și $z = fh$. $A$ fiind inel integru, $0 = \delta(a) =$

$= \delta(f) + \delta(g)$, ceea ce implică $\delta(f) = 0$ și $f \in A$, iar $1 = \delta(z) = \delta(f) + \delta(h) = = \delta(h)$ implică $h = bz + d$, cu $b, d \in A$. Atunci $z = fbz + fd$ implică $fb = 1$. Pe de altă parte $f \in I$, deci există $p, q \in A[z]$, cu $f = ra + qz$, de unde $1 = = fb = pba + qbz$; atunci termenul liber din membrul drept este $1 = p_0ba$ unde $p_0$ este termenul liber al lui $p$, contradicție cu ipoteza $a$ neinversabil.

Din propozițiile 1.17 și 1.8 rezultă următoarele.

**Corolarul 1.5.** Dacă inelul integru $A$ nu este corp, atunci inelul $A[z]$ nu este euclidian.

**Corolarul 1.6.** Fie $K$ un corp. Inelul $K[z_1, z_2]$ nu este inel principal (și deci nu este nici euclidian).

*Demonstrație.* Putem considera $K[z_1, z_2] = K[z_1][z_2]$. Inelul $K[z_1]$ nu este corp, deoarece elementele sale care nu sînt elemente nenule din $K$ nu sînt inversabile.

Cînd $A$ nu este corp, în $A[z]$ nu mai funcționează teorema împărțirii cu rest; ea poate fi totuși înlocuită cu o formulă asemănătoare.

**Propoziția 1.18.** Fie $A$ un inel, $f, h \in A[z]$ cu $\delta(f) = n$, $\delta(h) = m$, $f = = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $h = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i$.

Atunci există $q, r \in A[z]$, astfel încît

$$b_m^k f = qh + r, \tag{1.7}$$

unde $k = \max(n - m + 1, 0)$. În plus, dacă $b_m$ nu este divizor al lui zero, $q$ și $r$ sînt unice.

*Demonstrație.* Dacă $m = 0$ $(h = b_0)$, avem $k = n + 1$ și $b_0^{n+1} f = b_0^n f h$, deci (1.7) are loc cu $q = b_0^n f$ și $r = 0$. Dacă $m > 0$, propoziția se demonstrează prin inducție după $n$. Pentru $n < m$ rezultă $k = 0$ și (1.7) are loc cu $q = 0$ și $r = f$. Presupunem (1.7) adevărată pentru polinoame de grad $\leqslant n - 1$, cu $n - 1 \geqslant m$. Cum $f_1 = b_m f - a_n z^{n-m} h$ are coeficientul lui $z^n$, $b_m a_n - a_n b_m = 0$, $\delta(f_1) \leqslant n - 1$, deci există $q_1, r_1$ cu $\delta(r_1) < m$, astfel încît $b_m^{n-m} f_1 = q_1 h + r_1$. Atunci $b_m^{n-m+1} f = (q_1 + a_n b_m z^{n-m})h + r_1$, deci (1.7) este adevărată.

Pentru unicitate, să presupunem că există perechea de polinoame $(q_2, r_2)$, cu $b_m^k f = q_2 h + r_2$, $\delta(r_2) < m$, $(q - q_2)h = r_2 - r$. Dacă $q \neq q_2$, ar rezulta $\delta(q - q_2) \geqslant 0$ și cum $b_m$ nu e divizor al lui zero $\delta(r_2 - r) = \delta(h) + \delta(q - q_2) \geqslant m$, contradicție; rezultă $q = q_2$ și apoi $r = r_2$.

O teoremă de împărțire cu rest asemănătoare în inele de polinoame neeuclidiene este următoarea.

**Propoziția 1.19.** Fie $A$ un inel euclidian, $f, h \in A[z]$. Atunci există $a \in A$, $q, r \in A[z]$ cu $\delta(r) < \delta(h)$, astfel încît $af = qh + r$; în plus $a$ și coeficienții polinomului $q$ sînt relativ primi în $A$.

*Demonstrație.* Fie $K$ corpul fracțiilor lui $A$ (propoziția 1.13). Putem considera $f, h \in K[z]$ și aplicăm teorema împărțirii cu rest,

$$\exists\, \bar{q}, \bar{r} \in K[z], \text{ cu } f = \bar{q}h + \bar{r} \text{ și } \delta(f) < \delta(\bar{r}).$$

Fie $\bar{q} = \sum_{i=0}^{k} \frac{q_i'}{q_i''} z_i$, cu $q_i', q_i''$ relativ prime în $A$. Deoarece $A$ este inel euclidian, există $a = $ c.m.m.m.c $(q_0'', \ldots q_k'')$ și $q \triangleq a\bar{q} = \sum_{i=0}^{k} \frac{a}{q_i''} q_i' z^i \in A[z]$; în plus,



Scanned with OKEN Scanner

dacă notăm cu $q_i$ coeficienții polinomului $q$ $\left(q_i = \frac{a}{q_i''} q_i'\right)$ din definiția lui $a$ rezultă că $a, q_0, \ldots, q_k$ sînt relativ prime. Obținem

$$af = qh + r,$$

unde $r = a\bar{r} = af - gh \in A[z]$ și $\delta(r) = \delta(\bar{r}) < \delta(h)$.

În concluzie, dacă $K$ este corp, în $K[z]$ are loc teorema împărțirii cu rest, dar în $K[z_1, z_2] = K[z_1][z_2] (= K[z_2][z_1])$ au loc propoziițiile 1.18 și 1.19, coeficienții polinoamelor fiind din inelul euclidian $A = K[z_1]$ (respectiv $A = K[z_2]$).

**Teorema 1.1** (a împărțirii cu rest 2D). Fie $K$ un corp comutativ, $f, h \in K[z_1, z_2]$. Dacă $\delta_{z_2}(f) = n$, $\delta_{z_2}(h) = m$, $h = \sum_{i=0}^{m} b_i(z_1) z_2^i$, atunci există $q, r$ unice în $K[z_1, z_2]$ cu $\delta_{z_2}(r) < m$, astfel încît $b_m^k(z_1) f(z_1, z_2) = q(z_1, z_2) h(z_1, z_2) + r(z_1, z_2)$, unde $k = \max(n - m + 1, 0)$.

Dacă $\delta_{z_1}(f) = n'$, $\delta_{z_1}(h) = m'$, $h = \sum_{i=0}^{m'} b_i'(z_2) z_1^i$, atunci există $q', r'$ unice în $K[z_1, z_2]$, cu $\delta_{z_1}(r') < m'$, astfel încît

$$b_{m'}'^{k'}(z_2) f(z_1, z_2) = q'(z_1, z_2) h(z_1, z_2) + r'(z_1, z_2), \text{ unde } k' = \max(n' - m' + 1, 0).$$

**Teorema 1.2.** Fie $K$ un corp comutativ, $f, h \in K[z_1, z_2]$. Atunci:

1° există $a \in K[z_1]$, $q, r \in K[z_1, z_2]$, cu $\delta_{z_2}(r) < \delta_{z_2}(h)$, astfel încît $a$ și $q$ sînt relativ prime, și

$$a(z_1) f(z_1, z_2) = q(z_1, z_2) h(z_1, z_2) + r(z_1, z_2);$$

2° există $a' \in K[z_2]$, $q', r' \in K[z_1, z_2]$, cu $\delta_{z_1}(r') < \delta_{z_1}(h)$, astfel încît $a'$ și $q'$ sînt relativ prime, și

$$a'(z_2) f(z_1, z_2) = q'(z_1, z_2) h(z_1, z_2) + r'(z_1, z_2).$$

Rămîn, ca proprietăți comune în inelele integre $K[z]$ și $K[z_1, z_2]$, de exemplu cele care decurg din propozițiile 1.2–1.5:

— două polinoame $f$ și $g$ sînt asociate dacă și numai dacă există $u \in K$, $u \neq 0$, astfel încît $f = ug$ (vezi și propoziția 1.16);
— oricare doi c.m.m.d.c. ai polinoamelor $f$ și $g$ sînt asociați;
— dacă $(f, g) = d$ și $f = df'$, $g = dg'$ atunci $f'$ și $g'$ sînt relativ prime;
— orice polinom prim este ireductibil.

Fie $A$ un inel comutativ și $f \in A[z]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_n z^n$. Pentru oricare $x \in A$, considerăm elementul lui $A$, notat cu $f(x)$ și numit *valoarea lui $f$ în $x$*, $f(x) = \sum_{z=0}^{n} a_n x^n$. Funcția $x \to f(x)$ de la $A$ în $A$ se numește *funcția polinomială* asociată polinomului $A$. Un element $a \in A$ se numește *rădăcină* a polinomului $f$, dacă $f(a) = 0$.

Fie $K$ un corp și $K_1$ o extindere a sa. Se spune că un element $a \in K_1$ este *algebric* peste $K$, dacă există un polinom nenul $f \in K[z]$, astfel încît $f(a) = 0$; în caz contrar se spune că $a$ este *transcendent* peste $K$.



Scanned with OKEN Scanner

Corpul $K$ se numește *corp algebric închis* în $K_1$, dacă orice element din $K_1$ algebric peste $K$ aparține lui $K$. Corpul $K$ se numește *corp algebric închis*, dacă este algebric închis în orice extindere a sa.

O extindere $K_1$ a unui corp $K$ se numește *extindere algebrică*, dacă orice element din $K_1$ este algebric peste $K$.

Se poate demonstra (vezi [1], teorema 3.6 și corolarul 3.7) următoarea teoremă.

**Teorema 1.3.** Pentru orice corp $K$ există o extindere algebrică a sa $\overline{K}$ care este corp algebric închis și se numește închiderea algebrică a lui $K$.

Să studiem acum modul în care se poate testa în $K[z]$, respectiv $K[z_1, z_2]$, că două polinoame sînt relativ prime. În $K[z]$ se poate aplica algoritmul lui Euclid și dacă ultimul rest nenul $r_k$ este de grad 0, rezultă proprietatea cerută; în cazul 2D se poate aplica un algoritm analog, pe baza teoremei împărțirii cu rest 2D. În cele ce urmează vor fi expuse teste bazate pe rezultantul celor două polinoame.

**Propoziția 1.20** (1D). Fie $f, g \in K[z], f = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i,\ g = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i, a_n \neq 0, b_m \neq 0.$

Polinoamele $f$ și $g$ sînt relativ prime dacă și numai dacă matricea

$$R(f, g) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & & & \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ & & b_m & b_{m-1} & \dots & & b_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & & 0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & & & \end{bmatrix}}_{m+n} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

este nesingulară.

*Demonstrație.* Metoda I. Fie $f$ și $g$ două polinoame arbitrare de grad $n$ (respectiv $m$) și $\overline{K}$ o extindere a corpului $K$ în care $f$ are $n$ rădăcini $c_i$, $i = \overline{1,n}$ și $g$ are $m$ rădăcini $d_j$, $j = \overline{1,m}$. Vom numi *rezultant al polinoamelor $f$ și $g$* elementul

$$r(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (c_i - d_j). \tag{1.8}$$

Polinoamele $f$ și $g$ fiind arbitrare, vom considera rădăcinile $c_1, \dots, c_n$, $d_1, \dots, d_m$ algebric independente, deci $r(f, g)$ poate fi privit ca un polinom în nedeterminatele $c_i$, $d_j$.

Deoarece $g(z) = b_m \sum_{j=1}^{m} (z - d_j)$, putem rescrie (1.8) sub forma

$$r(f, g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(c_i). \tag{1.8a}$$



Scanned with OKEN Scanner

şi analog

$$r(g, f) = b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(d_j). \tag{1.8b}$$

Considerăm determinantul Vandermonde,

$$V = \begin{vmatrix} d_1^{n+m-1} & \dots & d_m^{n+m-1} & c_1^{n+m-1} & \dots & c_n^{n+m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1 & \dots & d_m & c_1 & \dots & c_n \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (d_i - d_j) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (c_i - c_j) \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (d_j - c_j).$$

Folosind simetria formulei (1.8), obţinem

$$a_n^m b_m^n \; V = r(g, f) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (d_i - d_j) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (c_i - c_j). \tag{1.9}$$

Vom calcula acum produsul determinanţilor $D$ şi $V$ ca determinant al matricei produs, deci (ţinînd seama de $a_n d_1^n + \dots + a_1 d_1 + a_0 = f(d_1)$ etc.)

$$DV = \begin{vmatrix} d_1^{m-1} f(d_1) & \dots & d_m^{m-1} f(d_m) & c_1^{m-1} f(c_1) & \dots & c_n^{m-1} f(c_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1 f(d_1) & \dots & d_m f(d_m) & c_1 f(c_1) & \dots & c_n f(c_n) \\ f(d_1) & \dots & f(d_m) & f(c_1) & \dots & f(c_n) \\ g(d_1) & \dots & g(d_m) & g(c_1) & \dots & g(c_n) \\ d_1 g(d_1) & \dots & d_m g(d_m) & c_1 g(c_1) & \dots & c_n g(c_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1^{n-1} g(d_1) & \dots & d_m^{n-1} g(d_m) & c_1^{n-1} g(c_1) & \dots & c_n^{n-1} g(c_n) \end{vmatrix} =$$

$(f(c_i) = 0, \; g(d_i) = 0)$

$$= \prod_{j=1}^{m} f(d_j) \prod_{i=1}^{n} g(c_i) \begin{vmatrix} d_1^{m-1} & \dots & d_m^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d_1 & \dots & d_m & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & c_n \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & c_1^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$



Scanned with OKEN Scanner

(determinantul apare după regula de calcul a lui Laplace ca produsul celor doi determinanți Vandermonde)

$$= \prod_{j=1}^{m} f(d_j) \prod_{i=1}^{n} g(c_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (d_i - d_j) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (c_i - c_j).$$

Înmulțim primul și ultimul membru al acestor egalități cu $a_n^m$, $b_m^n$, ținem seama de (1.8a), (1.8b) și (1.9) și obținem

$$Dr(g, f) \prod (d_i - d_j) \prod (c_i - c_j) = r(f, g)\, r(g, f) \prod (d_i - d_j) \cdot$$
$$\cdot \prod (c_i - c_j). \qquad (1.10)$$

Alegînd nedeterminatele $c_i$, $d_j$, încît $r(g, f)$ și produsele să fie nenule, rezultă $D = r(f, g)$. (Dacă există $d_j$ cu $f(d_j) = 0$, eliminăm în determinantul $DV$ coloanele nule și coloanele corespunzătoare din $V$, apoi eliminăm în produsele din (1.8), (1.9) factorii nuli ; obținem o formulă similară cu (1.10), fără factori nuli, de unde $D = r(f, g)$.) Ținînd seama de definiția rezultantului (1.8), polinoamele $f$ și $g$ vor avea rădăcini comune, dacă și numai dacă determinantul $r(f, g) = |R(f, g)|$ este nul ; deci vor fi relativ prime dacă și numai dacă $R(f, g)$ este nesingulară (rang $R(f, g) = m + n$).

Metoda a II-a. Fie $d = (f, g)$. Presupunem $\delta(d) \geqslant 1$ ; atunci $f$ și $g$ pot fi scrise

$$f(z) = d(z)\, \bar{f}(z), \quad \delta(\bar{f}) < n, \quad \bar{f}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i z^i,$$

$$g(z) = d(z)\, \bar{g}(z), \quad \delta(\bar{g}) < m, \quad \bar{g}(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{q}_j z^j.$$

Rezultă

$$\bar{g}(z) f(z) - \bar{f}(z) g(z) = 0,$$

adică

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} \bar{b}_j z^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i z^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j z^j\right) = 0,$$

coeficientul lui $z^{m+n-k}$ va fi

$$\sum_{=0}^{m+n-k} (\bar{b}_j\, a_{m+n-k-j} - \bar{a}_j\, b_{m-n-k-j}) = 0, \; k = \overline{1, m+n} \qquad (1.11)$$

(unde coeficienții $b_{j+1}$, $\bar{b}_j$ cu $j \geqslant m$, $a_{j+1}$, $\bar{a}_j$ cu $j \geqslant n$ sînt nuli ; de exemplu, pentru $k \leqslant \min(n-1, m-1)$, formula (1.11) devine

$$\sum_{j=0}^{m-1} \bar{b}_j\, a_{m+n-k-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_j\, b_{m+n-k-j} = 0).$$

Dar membrul stîng din (1.11) este produsul dintre vectorul

$$[\bar{b} \quad -\bar{a}] \triangleq [\bar{b}_{m-1}\; \bar{b}_{m-2} \; \ldots \; \bar{b}_0 \; -\bar{a}_0 \ldots - \bar{a}_{n-2} \quad -\bar{a}_{n-1}] \qquad (1.12)$$



Scanned with OKEN Scanner

şi coloana $k$ a matricei $R(f, g)$, $R^k = [a_{n-k+1}\; a_{n-k+2} \dots a_n\; 0 \dots 0\; b_m \dots b_{m-k+2}\; b_{m-k+1}]^T$, $k = \overline{1, m+n}$; am arătat că dacă $f$, $g$ au un divizor comun care nu este unitate, atunci există vectorul $[\bar{b} \;\; -\bar{a}]$, încît $[\bar{b} \;\; -\bar{a}]\, R(f, g) = 0$, deci rang $R(f, g) \leqslant m + n - 1$.

Invers, se poate arăta că dacă rang $R(f, g) \leqslant m + n - 1$, atunci există vectorul $[\bar{b} \;\; -\bar{a}]$ nenul, cu $[\bar{b} \;\; -\bar{a}]\, R = 0$; acest vector determină polinoamele $\bar{g}$ şi $\bar{f}$ cu $\delta(\bar{g}) \leqslant m-1$, $\delta(\bar{f}) \leqslant n-1$, încît $\bar{g}(z) f(z) = \bar{f}(z)\, g(z)$; atunci $g \mid \bar{g} f$ şi cum $\delta(\bar{g}) < \delta(g)$, rezultă că $g$ şi $f$ au divizor comun de grad $\geqslant 1$.

Un test similar funcţionează pentru polinoame 2D.

Fie $f$, $g \in K[z_1, z_2]$, cu $\delta_{z_i}(f) = n_i \quad \delta_{z_i}(g) = m_i$, $i = 1,2$;

$$f = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij}\, z_1^i\, z_2^j = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_i(z_2)\, z_1^i,$$

cu

$$a_i(z_2) = \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij}\, z_2^j;$$

$$g = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} b_{ij}\, z_1^i\, z_2^j = \sum_{i=0}^{m_1} b_i(z_2)\, z_1^i$$

cu

$$b_i(z_2) = \sum_{j=0}^{m_2} a_{ij}\, z_2^j.$$

Polinoamelor $f$ şi $g$ li se asociază matricele bloc $R^1(f, g)$ şi $R^2(f, g)$,

$$R^1(f, g) = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccccc} A^1_{n_1} & \dots & A^1_i & \dots & A^1_0 & & 0 \\ 0 & & A^1_{n_1} & \dots & A^1_i & \dots & A^1_0 \\ \hline 0 & & B^1_{m_1} & \dots & B^1_i & \dots & B^1_0 \\ B^1_{m_1} & \dots & B^1_i & \dots & B^1_0 & & 0 \end{array}\right]}_{n_1 + m_1} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} A \\ A \end{array}}\right\} m_1 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} B \\ B \end{array}}\right\} n_1 \end{array},$$

$$\text{unde } A^1_i = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{in_2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i0} & & 0 \\ 0 & & a_{in_2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i0} \end{bmatrix}}_{n_2 + m_2 + 1} \Big\} m_2 + 1,$$

$$B^1_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & b_{in_1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{i0} \\ b_{in_1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{i0} & & 0 \end{bmatrix}}_{n_2 + m_2 + 1} \Big\} n_2 + 1;$$

$R^2(f, g)$ are o formă similară celei a matricei $R^1(f, g)$ în care $m_1$ şi $n_1$ se înlocuiesc cu $m_1 + 1$ şi $n_1 + 1$, iar blocurile $A^1_i$ ($B^1_i$) cu blocurile $A^2_i$ ($B^2_i$), obţinute din acestea prin înlocuirea dimensiunilor $m_2 + 1$ ($n_2 + 1$) cu $m_2$ (respectiv cu $n_2$).



Scanned with OKEN Scanner

**Propoziția 1.21** (2D). Polinoamele $f$ și $g$ sînt relativ prime, dacă și numai dacă matricele $R^1(f, g)$ și $R^2(f, g)$ au rang maxim.

*Demonstrație.* Ca și în demonstrația propoziției 1.20 (metoda a II-a), presupunem că $f$ și $g$ nu sînt relativ prime, deci au un divizor comun $d$, cu $\delta_{z_1}(d) \geqslant 1$, sau $\delta_{z_2}(d) \geqslant 1$. Considerăm cazul $\delta_{z_1}(d) \geqslant 1$, deci $f$ și $g$ pot fi reprezentate sub forma

$$f = d\bar{f},\ \delta_{z_1}(\bar{f}) < n_1,\ \bar{f}(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2} \bar{a}_{ij}\, z_1^i z_2^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1-1} \bar{a}_i(z_2)\, z_1^i,\ \text{cu}\ \bar{a}_i(z_2) = \sum_{i=0}^{n_2} \bar{a}_{ij}\, z_2^j,$$

$$g = d\bar{g},\ \delta_{z_1}(\bar{g}) < m_1,\ \bar{g}(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{i=0}^{m_2} \bar{b}_{ij}\, z_1^i z_2^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{m_1-1} \bar{b}_i(z_2)\, z_1^i;\ \text{cu}\ \bar{b}_i(z_2) = \sum_{j=0}^{m_2} \bar{b}_{ij}\, z_2^j.$$

Rezultă $\bar{g}(z_1, z_2)\, f(z_1, z_2) - \bar{f}(z_1, z_2)\, g(z_1, z_2) = 0$, relație echivalentă (ca în propoziția 1.20) cu

$$[\bar{b}(z_2)\ \ -\bar{a}(z_2)]\, R^k(z_2) = 0,\ k = \overline{1, n_1 + m_1}, \tag{1.13}$$

unde

$$[\bar{b}(z_2)\ \ -\bar{a}(z_2)] = [\bar{b}_{m_1-1}(z_2) \ldots \bar{b}_0(z_2)\ \ -\bar{a}_0(z_2) \ldots -\bar{a}_{n_1-1}(z_2)]$$

și

$$R^k(z_2) = [a_{n_1-k+1}(z_2) \ldots a_{n_1}(z_2)\ 0 \ldots 0\ b_{m_1}(z_2) \ldots b_{m_1-k+1}(z_2)]^T.$$

Considerăm vectorii formați cu coeficienții polinoamelor $\bar{a}_i, \bar{b}_i$,

$$\bar{a}_i = [\bar{a}_{i0} \ldots \bar{a}_{in_2}],\ \bar{b}_i = [\bar{b}_{im_2} \ldots \bar{b}_{i0}].$$

Prima relație (1.13) este $[\bar{b}(z_2)\ \ -\bar{a}(z_2)]\, R^1(z_2) = 0$, adică

$$\bar{b}_{m_1-1}(z_2)\, a_{n_1}(z_2) - \bar{a}_{n_1-1}(z_2)\, b_{m_1}(z_2) = 0,$$

relație echivalentă (folosind din nou demonstrația propoziției anterioare) cu

$$[\bar{b}_{m_1-1}\ \ -\bar{a}_{n_1-1}] \begin{bmatrix} A^1_{n_1} \\ B^1_{m_1} \end{bmatrix} = 0.$$

A doua relație (1.13) ($k = 2$) este

$$\bar{b}_{m_1-1}(z_2)\, a_{n_1-1}(z_2) + \bar{b}_{m_1-2}(z_2)\, a_{n_1}(z_2) - \bar{a}_{n_1-2}(z_2)\, b_{m_1}(z_2) -$$
$$- \bar{a}_{n_1-1}(z_2)\, b_{m_1-1}(z_2) = 0,$$

echivalentă cu

$$[\tilde{b}_{m_1-1}\ \tilde{b}_{m_1-2}\ \ -\tilde{a}_{n_1-2}\ \ -\tilde{a}_{n_1-1}]\begin{bmatrix} A^1_{n_1-1} \\ A^1_{n_1} \\ B^1_{m_1} \\ B^1_{m_1-1} \end{bmatrix} = 0$$

ş.a.m.d.
Rezultă echivalenţa relaţiilor (1.13) cu egalitatea

$$[\tilde{b}_{m_1-1} \ldots \tilde{b}_0\ \ -\tilde{a}_0 \ldots\ \ -\tilde{a}_{n_1-1}]\ R^1(f, g) = 0, \qquad (1.14)$$

deci matricea $R^1(f, g)$ nu este de rang maxim.

Invers, dacă $R^1(f, g)$ nu este de rang maxim, se deduce (ca în propoziţia 1.20) existenţa unui divizor comun $d$ al polinoamelor $f$ şi $g$ cu $\delta_{z_1}(d) \geqslant 1$.

Analog se arată că $f$ şi $g$ au un divizor comun $d$, cu $\delta_{z_2}(d) \geqslant 1$, dacă şi numai dacă $R^2(f, g)$ nu are rang maxim.

*Exemple.* 1.15. Fie $f = 2z_1 + z_2$ şi $g = z_1^2 z_2 + 3$. Atunci $n_1 = 1$, $n_2 = 1$ $m_1 = 2$, $m_2 = 1$; $a_1(z_2) = 2$, $a_0(z_2) = z_2$, $b_2(z_2) = z_2$, $b_1(z_2) = 0$, $b_0(z_2) = 3$.

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{10} & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};\ A_0^1 = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{00} & 0 \\ 0 & a_{01} & a_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21} & b_{20} \\ b_{21} & b_{20} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ B_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & b_{11} & b_{10} \\ b_{11} & b_{10} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & b_{01} & b_{00} \\ b_{01} & b_{00} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix};\ A_1^2 = [a_{11}\ a_{10}] = [0\ \ 2];$$

$$A_0^2 = [a_{01}\ a_{00}] = [1\ \ 0];$$

$$B_1^2 = [b_{21}\ b_{20}] = [1\ \ 0];\ B_1^2 = [b_{11}\ b_{10}] = [0\ \ 0];$$

$$B_0^2 = [b_{01}\ b_{00}] = [0\ \ 3].$$

Matricele

$$R^1(f, g) = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_0^1 & 0 \\ 0 & A_1^1 & A_0^1 \\ \hline B_2^1 & B_1^1 & B_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

și

$$R^2(f,g) = \left[\begin{array}{cccc} A_1^2 & A_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^2 & A_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_1^2 & A_0^2 \\ \hline 0 & B_2^2 & B_1^2 & B_0^2 \\ B_2^2 & B_1^2 & B_0^2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

au rang maxim (6, respectiv 5) de unde rezultă că polinoamele $f$ și $g$ sînt relativ prime.

1.16. Pentru $f = z_1 + z_2$ și $g = z_1^2 + z_1 z_2$,

$$R^1(f,g) = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \; R^2(f,g) = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Se observă că rang $R^1(f, g) = 4 < 6$, rang $R^2(f, g) = 3 < 5$, deci $f$ și $g$ nu sînt relativ prime.

Din

$$[\bar{b}_1 \; \bar{b}_0 \; -\bar{a}_0] \, R^1(f, g) = [\bar{b}_{11} \; \bar{b}_{10} \; \bar{b}_{01} \; \bar{b}_{00} \; -\bar{a}_{00} \; -\bar{a}_{01}] \, R^1(f, g) =$$

$$= 0 \text{ se deduc}: \bar{b}_{01} = \bar{b}_{00} = 0, \; \bar{b}_{11} = \bar{a}_{01}, \; \bar{b}_{01} = \bar{a}_{00}.$$

Luînd $\bar{b}_{11} = \bar{a}_{01} = 0$, $\bar{b}_{10} = \bar{a}_{00} = 1$, obținem polinoamele $\bar{f}$ și $\bar{g}$ din demonstrația propoziției 1.21 : $\bar{f} = 1$, $\bar{g} = z_1$ și $f = (z_1 + z_2)\, 1 = d\bar{f}$, $g = (z_1 + z_2)\, z_1 = d\bar{g}$ ; c.m.m.d.c. al lui $f$ și $g$ este deci $d = z_1 + z_2$.

O proprietate comună a inelelor $K[z]$ și $K[z_1, z_2]$ este că ambele sînt inele factoriale. Pentru a arăta aceasta este necesară noțiunea de polinom primitiv.

*Definiția 1.15.* Fie $A$ un inel integru și $f \in A\,[z]$; $f = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ ; se spune că polinomul $f$ este *primitiv*, dacă coeficienții $a_i$ nu au divizor comun prim în $A$.

**Propoziția 1.22.** Produsul a două polinoame primitive este polinom primitiv.

*Demonstrație.* Fie $f, g \in A[z]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$, polinoame primitive. Presupunem prin absurd că $fg$ nu este primitiv, deci există $a$ prim în $A$, încît $a | fg$. Evident $a$ divide un polinom, dacă și numai dacă $a$ divide toți coeficienții polinomului.



Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $f$ şi $g$ sînt primitive, există $a_i$ cu $a \nmid a_i$, $b_j$ cu $a \nmid b_j$; fie $i_0, j_0$ indicii minimi cu aceste proprietăţi. În produsul $fg$ coeficientul lui $z^{i_0+j_0}$ este

$$c_{i_0+j_0} = \sum_{i=0}^{i_0-1} a_i b_{i_0+j_0-i} + a_{i_0} b_{j_0} + \sum_{j=0}^{j_0-1} a_{i_0+j_0-j} b_j.$$

Prima sumă se divide la $a$, deoarece $a|a_i$, $i = \overline{0, i_0 - 1}$ şi ultima la fel, deoarece $a|b_j$, $j = \overline{0, j_0 - 1}$; în schimb $a \nmid a_{i_0} b_{j_0}$, deci $a \nmid c_{i_0+j_0}$ şi $a$ nu divide produsul $fg$, contradicţie.

Din demonstraţia propoziţiei rezultă că dacă $a$ este prim în $A$ şi $a|fg$, atunci $a|f$ sau $a|g$, aşa că are loc următorul corolar.

**Corolarul 1.7.** Un element prim în inelul integru $A$ este prim şi în $A[z]$.

*Definiţia 1.16*. Fie $A$ un inel factorial, $f \in A[z]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$. Elementul $c_f =$ c.m.m.d.c. $(a_0, \ldots, a_n)$ se numeşte *conţinutul* polinomului $f$.

Un polinom este primitiv, dacă şi numai dacă $c_f \sim 1$.

Orice polinom $f$ se poate factoriza $f = c_f f^*$, unde $f^*$ este un polinom primitiv.

**Lema 1.1.** Fie $A$ un inel factorial, $f, g \in A[z]$, $f$ polinom primitiv. Dacă $f|ag$, unde $a \in A$, $a \neq 0$, atunci $f|g$.

*Demonstraţie.* $f|ag \Rightarrow \exists\, h \in A[z]$, $ag = fh$; factorizăm $g = c_g g^*$, $h = c_h h^*$, deci $a c_g g^* = c_h h^* f$; cum $g^*$ şi $h^* f$ sînt primitive, rezultă $a c_g \sim c_h$ şi $g^* \sim h^* f$, de unde $f|g^*$ şi $f|g$.

**Lema 1.2.** Fie $A$ un inel factorial şi $f \in A[z]$ cu $\delta(f) \geqslant 1$. Atunci $f$ este ireductibil în $A[z]$, dacă şi numai dacă $f$ este primitiv în $A[z]$ şi ireductibil în $K[z]$, unde $K$ este corpul fracţiilor lui $A$.

*Demonstraţie.* Fie $f$ ireductibil în $A[z]$ (deci $c_f = 1$ şi $f$ este primitiv). Presupunem prin absurd că $f$ este reductibil în $K[z]$, deci $\exists\, g, h \in K[z]$, cu $\delta(g) \geqslant 1$, $\delta(h) \geqslant 1$, încît $f = gh$; fie $n_g$ ($n_h$) c.m.m.m.c. al numitorilor coeficienţilor polinomului $g$ ($h$); atunci $n_g g = g_1$, $n_h h = h_1$, cu $g_1, h_1 \in A[z]$, $\delta(g_1) = \delta(g)$, $\delta(h_1) = \delta(h)$. Factorizăm pe $g_1$: $g_1 = c_{g_1} g_1^*$, cu $g_1^* \in A[z]$ polinom primitiv, $\delta(g_1^*) = \delta(g_1) \geqslant 1$. Rezultă $n_g n_h f = c_{g_1} g_1^* h$, de unde $g_1^* | n_g n_h f$ şi cu lema 1.1 $g_1^*$ divide pe $f$ în $A[z]$, contradicţie cu $f^*$ ireductibil în $A[z]$.

Reciproc, dacă $f$ este ireductibil în $K[z]$, orice divizor al său este de forma $a$ sau $af$, cu $a \in K$, $a \neq 0$; notînd $a = \dfrac{a_1}{a_2}$, $a_1, a_2 \in A$, rezultă că în $A[z]$ orice divizor al lui $f$ este de forma $a_1$ sau $a_1 f$; dacă $f$ este primitiv în $A[z]$ rezultă $a_1 \sim 1$, deci $f$ este ireductibil şi în $A[z]$.

**Lema 1.3.** Fie $A$ un inel factorial. Atunci orice polinom ireductibil din $A[z]$ este prim.

*Demonstraţie.* Fie $f$ ireductibil în $A[z]$. Dacă $\delta(f) = 0$, atunci $f \in A$ şi $f$ este ireductibil în $A$; $A$ inel factorial implică $f$ este prim în $A$, deci (corolarul 1.7) este prim şi în $A[z]$.

Dacă $\delta(f) \geqslant 1$, fie $g, h \in A[z]$, cu $f|gh$. Deoarece $f$ este ireductibil în $A[z]$, conform lemei 1.3 $f$ este primitiv în $A[z]$ şi ireductibil în $K[z]$, deci ($K[z]$ fiind inel euclidian) prim în $K[z]$ şi deci $f$ divide în $K[z]$ pe $g$ sau pe $h$. Dacă $f|g$, atunci $g = ff'$, cu $f' \in K[z]$. Fie $a$ c.m.m.m.c. al numitorilor polinomului $f'$, $a \in A$, $a \neq 0$; atunci $af' \in A[z]$ şi din $ag = f(af')$ rezultă că $f$ divide pe $ag$, deci (lema 1.1) $f$ divide pe $g$ în $A[z]$.



Scanned with OKEN Scanner

**Teorema 1.4.** Dacă $A$ este inel factorial, atunci $A[z]$ şi $A[z_1, z_2]$ sînt inele factoriale.

*Demonstrație.* Arătăm prin inducţie după $\delta(f)$ că orice element neinversabil şi nenul $f$ din $A[z]$ se descompune într-un produs finit de polinoame ireductibile. Dacă $\delta(f) = 0$, $f$ aparţine inelului factorial $A$, este neinversabil şi nenul, deci se descompune într-un produs finit de elemente prime din $A$, deci prime şi în $A[z]$ (corolarul 1.7), adică ireductibile în $A[z]$.

Dacă $\delta(f) \geqslant 1$, factorizăm $f = c_f f^*$, cu $c_f \in A$ şi $f^*$ polinom primitiv; pentru $c_f$ am arătat mai sus existenţa descompunerii; dacă $f^*$ este ireductibil, demonstraţia este încheiată, dacă nu, $f^* = gh$, cu $\delta(g) < \delta(f^*)$, $\delta(h) < \delta(f^*)$; conform ipotezei de inducţie $g$ şi $h$ sînt produse finite de elemente ireductibile, deci descompunerea lui $f$ se obţine înmulţind produsele de elemente ireductibile corespunzătoare lui $c_f$, $g$ şi $h$; conform lemei 1.3, aceste elemente sînt şi prime, deci $A[z]$ este inel factorial.

De aici rezultă că şi $A[z_1, z_2] = A[z_1][z_2]$ este inel factorial.

**Corolarul 1.8.** Fie $K$ un corp. Atunci $K[z]$ şi $K[z_1, z_2]$ sînt inele factoriale.

### 1.2.3. Fracţii raţionale

Fie $K$ un corp comutativ. Am văzut (propoziţia 1.14) că inelele $K[z]$ şi $K[z_1, z_2]$ sînt integre. Urmînd construcţia din § 1.1.3, vom obţine corpurile de fracţii ale acestor inele. Mulţimea polinoamelor nenule din $K[z]$ ($K[z_1, z_2]$) este un sistem multiplicativ $M_1$ ($M_2$). Pe produsul cartezian $K[z] \times M_1$ (respectiv $K[z_1, z_2] \times M_2$) considerăm relaţia de echivalenţă: $(f, g) \sim (f', g')$, dacă şi numai dacă $fg' = f'g$; clasa de echivalenţă a perechii $(f, g)$ se notează $\frac{f}{g}$ şi se numeşte *fracţie raţională*; $f$ se numeşte *numărătorul* fracţiei, iar $g$ numitorul fracţiei.

Cu adunarea şi înmulţirea definite de

$$\frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} = \frac{fg_1 + gf_1}{gg_1}, \quad \frac{f}{g}\frac{f_1}{g_1} = \frac{ff_1}{gg_1},$$

mulţimea factor $K[z] \times M_{1/\sim}$ ($K[z_1, z_2] \times M_{2/\sim}$) are o structură de corp comutativ (propoziţia 1.13), care se notează $K(z)$ (respectiv $K(z_1, z_2)$) şi se numeşte *corpul fracţiilor raţionale în nedeterminata* $z$ (*în nedeterminatele* $z_1$ *şi* $z_2$) *cu coeficienţi în corpul* $K$.

Cu injecţia canonică $s : K[z] \to K(z)$, $s(f) = \frac{f}{1}$ şi identificarea inelelor $K[z]$ şi $s(K[z])$, $K[z]$ va fi un subinel al lui $K(z)$. Analog, $K[z_1, z_2]$ este subinel al lui $K(z_1, z_2)$. Deoarece $K[z_1]$ este subinel al lui $K(z_1)$, inelul polinoamelor în nedeterminatele $z_1$, $z_2$ fiind în acelaşi timp inelul polinoamelor în nedeterminata $z_2$ cu coeficienţi în inelul $K[z_1]$ ($K[z_1, z_2] = K[z_1][z_2]$,) el va fi subinel al inelului polinoamelor în nedetermina $z_2$, cu coeficienţi în corpul $K(z_1)$. Analog, $K[z_1, z_2]$ este subinel al inelului $K(z_2)[z_1]$.

Notăm $K^{pr}(z)$ mulţimea fracţiilor raţionale $\frac{f}{g} \in K(z)$ cu $\delta(f) \leqslant \delta(g)$ numite *fracţii raţionale proprii*.

Cum diferenţa şi produsul a două fracţii raţionale proprii sînt tot fracţii raţionale proprii, $K^{pr}(z)$ va fi subinel al lui $K(z_1, z_2)$ (nu şi subcorp, deoarece

inversa unei fracţii raţionale strict proprii ($\delta(f) < \delta(g)$) nu este fracţie raţională proprie).

Analog, mulţimea $K^{pr}(z_1, z_2)$ a fracţiilor raţionale $\frac{f}{g} \in K(z_1, z_2)$ cu $\delta_{z_i}(f) \leqslant \delta_{z_i}(g)$, $i = 1, 2$, este subinel al lui $K(z_1, z_2)$.

**Propoziţia 1.23.** Orice fracţie raţională din $K(z)$ poate fi reprezentată în mod unic ca suma unui polinom şi a unei fracţii raţionale strict proprii.

*Demonstraţie.* Dacă $\frac{f}{g}$ nu este strict proprie, din teorema împărţirii cu rest în inelul euclidian $K[z]$ (propoziţia 1.16) există $q, r$ unice în $K[z]$, cu $\delta(r) < \delta(g)$, astfel încît $f = qg + r$, deci $\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$.

## 1.3. Module

### 1.3.1. Module şi spaţii vectoriale

Structura de modul s-a dovedit cea mai adecvată studiului sistemelor liniare, după ce R. E. Kalman a dezvoltat (începînd cu anul 1963) teoria algebrică a acestor sisteme. În acest paragraf vor fi date doar primele noţiuni referitoare la module, pentru o prezentare completă cititorul putînd consulta [1].

În acest paragraf orice inel va fi presupus unitar.

*Definiţia 1.17.* Fie $A$ un inel. Se numeşte $A$ — *modul la stînga* (sau *modul la stînga peste* $A$) o mulţime nevidă $E$, împreună cu două legi de compoziţie:

i) o lege de grup comutativ (notată aditiv);

ii) o lege de compoziţie externă $(a, x) \mapsto ax$, avînd inelul $A$ ca domeniu de operatori, care satisface axiomele:

$$M_1 \quad a(x + y) = ax + ay,$$

$$M_2 \quad (a + b)x = ax + bx,$$

$$M_3 \quad a(bx) = (ab)x,$$

$$M_4 \quad 1x = x,$$

oricare ar fi $a, b \in A$ şi $x, y \in E$.

$E$ se numeşte *$A$-modul la dreapta*, dacă în locul axiomei $M_3$ are loc

$$M_3' \quad a(bx) = (ba)x.$$

Dacă $A$ este inel comutativ, noţiunile de inel la stînga şi la dreapta coincid şi $E$ se va numi *$A$-modul*.

*Exemple.* 1.17. Dacă $A$ este inel, mulţimea $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) | \; a_i \in A\}$ (cu $n \geqslant 1$) este $A$-modul la stînga cu legile de compoziţie

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$a(a_1, \ldots, a_n) = (aa_1, \ldots, aa_n).$$

1.18. Dacă $A = K[z]$, unde $K$ este un corp comutativ, atunci $(K[z])^n$ este $K[z]$-modul. Prin identificarea $(\sum_i a_{1i} z^i, \ldots, \sum_i a_{ni} z^i) = \sum_i (a_{1i}, \ldots, a_{ni}) z^i$ acesta coincide cu $K^n[z]$. Analog, $K^n[[z]]$ este $K[z]$-modul.

1.19. Mulţimile $K^n[z_1, z_2]$, $K^n[[z_1, z_2]]$ sînt $K[z_1, z_2]$-module (constituind baza teoriei algebrice a sistemelor 2D).

*Definiţia 1.18.* Fie $K$ un corp. Mulţimea $E$ se numeşte *spaţiu vectorial la stînga (la dreapta)* peste corpul $K$, dacă $E$ este $K$-modul la stînga (la dreapta).

Elementele lui $E$ se numesc *vectori*, iar cele ale lui $K$ *scalari*.

*Exemple.* 1.20. $K^n$ este spaţiu vectorial la stînga peste $K$. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sînt spaţii vectoriale peste $\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$.

1.21. $(K(z))^n$ este spaţiu vectorial peste corpul $K(z)$ al fracţiilor raţionale cu coeficienţi în corpul comutativ $K$.

*Definiţia 1.19.* Fie $A$ un inel, $E$ şi $E'$ două $A$-module. O funcţie $f: E \to E'$ se numeşte *morfism de A-module* (sau *aplicaţie A-liniară*, sau *A-omomorfism*) dacă oricare ar fi $a \in A$, $x, y \in E$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(ax) = a f(x).$$

Mulţimea morfismelor de la $E$ la $E'$ se notează $\mathrm{Hom}(E, E')$ şi are o structură de $A$-modul la stînga în raport cu adunarea morfismelor şi înmulţirea cu elemente din $A$, $f + g$ şi $af$, definite prin: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(af)(x) = af(x)$, pentru $a, x, \in A$, $f, g \in \mathrm{Hom}(E, E')$.

Un morfism bijectiv $f: E \to E'$ este un izomorfism al $A$-modulului $E$ pe $E'$.

*Definiţia 1.20.* O submulţime nevidă $F$ a unui $A$-modul $E$ se numeşte *submodul* al lui $E$, dacă $F$ este subgrup stabil al lui $E$.

Cu alte cuvinte, $F$ este submodul al lui $E$ dacă

i) $x, y \in F \Rightarrow x - y \in F$;

ii) $a \in A$, $x \in F \Rightarrow ax \in F$.

Se verifică uşor că $F$ este modul faţă de operaţiile induse. Un submodul al unui spaţiu vectorial $V$ se numeşte *subspaţiu vectorial* al lui $V$.

*Exemple.* 1.22. $\{0\}$ şi $E$ (unde 0 este elementul nul al $A$-modulului $E$) sînt submodule ale lui $E$, numite submodule improprii.

1.23. Mulţimea $F_i = \{(0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0) \mid a_i \in A\}$ este submodul al modulului $A^n$. Aplicaţia $pr_i : A^n \to F_i$, $pr_i((a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)) = (0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0)$ este morfism de $A$-module.

1.24. Dacă $f: E \to E'$ este un morfism de $A$-module, atunci $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ este submodul al lui $E$, numit *nucleul* morfismului $E$, şi $f(E) = \{y \in E' \mid \exists\, x \in E \text{ cu } f(x) = y\}$ este submodul al lui $E'$, numit *imaginea* morfismului $f$.

Fie $F$ un submodul al $A$-modulului $E$. Considerăm mulţimea $E_{/F}$ a claselor de echivalenţă în raport cu relaţia de echivalenţă pe $E$ $x \equiv y (\mathrm{mod}\, F)$, dacă şi numai dacă $x - y \in F$. Se poate arăta că $E_{/F}$ este $A$-modul în raport cu legile de compoziţie

$$[x] + [y] = [x + y],\ a[x] = [ax],$$



Scanned with OKEN Scanner

$x, y \in E$, $a \in A$ ($[x]$ este clasa de echivalență a elementului $x \in E$) și se numește *modulul factor* al lui $E$ prin submodulul $F$.

Se poate demonstra următoarea teoremă fundamentală de izomorfism. Dacă $f : E \to E'$ este un morfism de $A$-module, atunci modulele $\operatorname{Im} f$ și $E_{/\operatorname{Ker} f}$ sînt izomorfe.

Demonstrația constă în a arăta că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & f(E) \\ & \varphi \searrow \quad \nearrow \psi & \\ & E_{/\operatorname{Ker} f} & \end{array}$$

unde $\varphi : x \mapsto [x]$ este surjecția canonică și $\psi$ izomorfismul $\psi : [x] \to f(x)$.

Vom spune că un element $x$ al $A$-modulului $E$ este *combinație liniară* de elemente din mulțimea $X = \{x\}_{i \in I} \subset E$ cu coeficienți din $A$, dacă există o familie de suport finit $(a_i)_{i \in I} \subset A$, astfel încît $x = \sum_{i \in I} a_i x_i$.

Mulțimea combinațiilor liniare de elemente din $X$ se numește *submodulul generat* de $X$ și se notează cu $< X >$; mulțimea $X$ se numește *sistem de generatori* al $A$-modulului $< X >$. Un $A$-modul $E$ se numește *finit generat*, dacă are cel puțin un sistem finit de generatori.

*Exemple* 1.25. Dacă $E$ este $A$-modul și $x \in E$, mulțimea $Ax = \{ax \mid a \in A\}$ este submodul al lui $E$, de tip finit, sistemul de generatori avînd singurul element $x$; $Ax$ se numește *submodulul ciclic* al lui $E$, generat de $x$.

1.26. Modulul $A^n$ este finit generat, avînd sistemul de generatori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

1.27. Fie $A$ un inel și $A^I$ mulțimea funcțiilor $f : I \to A$, unde $I$ este o mulțime nevidă. Se verifică ușor că $A^I$ este $A$-modul la stînga. O funcție $f \in A^I$ se numește funcție *de suport finit*, dacă mulțimea $\operatorname{Supp}(f) = \{i \in I \mid f(i) \neq 0\}$ este finită. Atunci mulțimea $A^{(I)}$ a funcțiilor de suport finit din $A^I$ este $A$-submodul al modulului $A^I$. Dacă $I$ este mulțime finită, $A^{(I)} = A^I$ este finit generat, avînd sistemul de generatori $(e_i)_{i \in I}$, unde $e_i(j) = \delta_{ij}$. Dacă mulțimea $I$ nu este finită, $A^{(I)}$ nu este finit generat.

Fie acum $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o submulțime finită de elemente ale $A$-modulului $E$; dacă există o combinație liniară de elemente din $X$, cu coeficienții din $A$ nu toți nuli, egală cu zero, se spune că $X$ este *sistem liniar dependent* peste $A$; în caz contrar $X$ este *sistem liniar independent peste* $A$. O submulțime oarecare $Y$ a lui $E$ se numește *liniar dependentă* peste $A$, dacă există o submulțime finită $X$ a lui $Y$ care este liniar dependentă peste $A$; în caz contrar se nuumește *liniar independentă* peste $A$.

*Definiția 1.21.* O submulțime $X$ a $A$-modulului $E$ se numește *bază* a lui $E$, dacă $X$ este un sistem de generatori al lui $E$ liniar independent peste $A$.

Un modul se numește model *liber* dacă are o bază.

Dacă $X = \{x_i\}_{i \in I}$ este o bază a lui $E$, reprezentarea unui element $x$, ca o combinație liniară de elemente din $X$ este unică. Într-adevăr, dacă $x = \sum_{i \in I} a_i x_i = \sum_{i \in I} b_i x_i$, unde $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ sînt familii de suport finit din $A$, atunci $\sum_{i \in I} (a_i - b_i) x_i = 0$, de unde $a_i - b_i = 0 \ \forall i \in I$, deoarece $X$ este liniar independentă, deci $a_i = b_i$.

*Exemplul* 1.28. $A$-modulul $A^I$ unde $I$ este finită, are bază (numită canonică) $(e_i)_{i \in I}$, unde $e_i(j) = \delta_{ij}$.

Se poate arăta că orice spațiu vectorial admite cel puțin o bază; există însă module care nu admit bază. De exemplu, pe grupul comutativ $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ (exemplul 1.10) aplicația $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $m[k] = [mk]$ determină o structură de $\mathbb{Z}$-modul; deoarece $n[k] = [nk] = [0]$, rezultă că orice submulțime $\{[k]\}$ este liniar dependentă, deci $\mathbb{Z}_n$ nu admite baze.

### 1.3.2. Matrice

Fie $A$ un inel unitar, $I$ și $J$ două mulțimi.

*Definiția 1.22.* Se numește *matrice de tip* $(I, J)$ *cu elemente din* $A$ (sau *peste* $A$) o familie $F = (f_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ de elemente din $A$. Pentru fiecare $i \in I$ familia $(f_{ij})_{j\in J}$ se numește *linia* $i$ a matricei $F$ și pentru fiecare $j \in J$ familia $(f_{ij})_{i\in I}$ se numește *coloana* $j$ a lui $F$.

Mulțimea matricelor de tip $(I, J)$ peste $A$ se identifică deci cu mulțimea $A^{I\times J}$. Dacă $I$ și $J$ sînt finite, fie $I = \{1, \ldots, n\}$, $J = \{1, \ldots, m\}$ se spune că o matrice de tipul $(I, J)$ este de tipul $n \times m$ și elementele ei se scriu sub forma:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}.$$

Vom nota cu $M_{n\times m}(A)$ sau cu $A^{n\times m}$ mulțimea matricelor de tipul $n \times m$ peste $A$. Dacă $m = n$, se spune că $F$ este matrice pătrată de ordinul $n$; mulțimea acestor matrice se va nota cu $M_n(A)$.

Mulțimea $M_{n\times m}(A)$ are o structură de grup comutativ în raport cu operația de adunare, definită astfel: dacă $F = (f_{ij})$, $G = (g_{ij})$, atunci $F + G = (f_{ij} + g_{ij})$. Elementul neutru al acestui grup este matricea cu toate elementele nule, numită matricea nulă.

Dacă $F \in M_{n\times m}(A)$ și $G \in M_{m\times p}(A)$, produsul $FG$ este o matrice din $M_{n\times p}(A)$, definită prin

$$FG \triangleq \left(\sum_{k=1}^{m} f_{ik}\; g_{kj}\right).$$

Din definiție rezultă proprietățile de asociativitate și distributivitate:

$$F(GH) = (FG)\,H,$$

$$F(G + H) = FG + FH, \quad (F + G)\,H = FH + GH.$$

Rezultă că $M_n(A)$ are o structură de inel; acest inel are elementul unitate $I_n$, numit matricea unitate de ordinul $n$ și definit prin $I_n = (\delta_{ij})$.

Acest inel nu este comutativ pentru $n > 1$. Într-adevăr pentru $n = 2$ și

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$FG = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = GF.$$



Scanned with OKEN Scanner

Fie $A$ un inel comutativ și unitar. Mulțimea $U_A$ a unităților lui $A$ (a elementelor inversabile din $A$) este grup multiplicativ. Notăm cu $|F|$ determinantul matricei $F$.

**Propoziția 1.24.** Matricea $F$ este unitate în $M_n(A)$, dacă și numai dacă $|F| \in U_A$.

*Demonstrație.* $F$ unitate $\Rightarrow \exists\ G \in M_n(A)$, încît $FG = GF = I_n$; atunci $|F|\,|G| = 1$ și cum $|F|, |G| \in A$, rezultă $|F| \in U_A$.

Reciproc, dacă $|F| \in U_A$, atunci $\exists\ |F|^{-1} \in A$ și $G = |F|^{-1} F^* \in M_n(A)$ unde $F^*$ este matricea complemenților algebrici ai lui $F^T$. În plus, $FG = GF = I$, deci $F$ este unitate în $M_n(A)$.

Grupul multiplicativ al unităților inelului $A$ se numește *grupul liniar de ordinul n al inelului A* și se notează $GL_n(A)$. În acest grup considerăm următoarele elemente, numite *matrice elementare* de tipurile I, II, III :

I
$$E_{ij}(a) = \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & a & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \underset{j}{\vdots} & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad a \in A,\ i \neq j;$$

II
$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & & \underset{i}{\vdots} & & \underset{j}{\vdots} & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad i<j;$$

III
$$E_i(a) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ \cdots & \cdots & a & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i, \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad a \in U_A.$$



Scanned with OKEN Scanner

Matricele $E_{ij}(a)$, $P_{ij}$ și $E_i(a)$ aparțin lui $GL_n(A)$, deoarece printr-un calcul imediat se obține $|E_{ij}(a)| = 1$, $|P_{ij}| = -1$, $|E_i(a)| = a$, iar $1, -1$, $a \in U_A$. De asemenea, $E_{ij}(a)E_{ij}(b) = E_{ij}(a+b)$, $a, b \in A$, $P_{ij}\ P_{ij} = I$, $E_i(a)\ E_i(b) = E_i(ab)$, $a$, $b \in U_A$, deci inversele matricelor elementare sînt tot matrice elementare,

$$E_{ij}(a)^{-1} = E_{ij}(-a),\ P_{ij}^{-1} = P_{ij},\ E_i(a)^{-1} = E_i(a^{-1}).$$

Fie $F \in M_n(A)$. Se observă că matricea produs $E_{ij}(a)F$ se obține din $F$ prin adunarea la linia $i$ a liniei $j$, înmulțite cu $a \in A$, celelalte linii rămînînd neschimbate; $P_{ij}\ F$ se obține din $F$ prin permutarea liniei $i$ cu linia $j$; $E_i(a)\ F$ se obține din $F$, înmulțind linia $i$ cu $a \in U_A$. Analog, $FE_{ij}(a)$ se obține prin adunarea la coloana $j$ a coloanei $i$ înmulțite cu $a \in A$, $FP_{ij}$ prin permutarea coloanelor $i$ și $j$ și $FE_i(a)$ prin înmulțirea coloanei $i$ cu $a \in U_A$. Aceste transformări se numesc *transformări elementare* asupra liniilor, respectiv coloanelor matricei $F$. Cum $E_{ij}(a)\ I_n = E_{ij}(a)$, $P_{ij}\ I_n = P_{ij}$, $E_i(a)\ I_n = E_i(a)$, rezultă că matricele elementare sînt obținute din matricea unitate $I_n$ prin transformările elementare corespunzătoare asupra liniilor (și analog asupra coloanelor). Se observă că transformările elementare asupra liniilor (coloanelor) definite prin înmulțire la stînga (la dreapta) cu matricele elementare din $GL_n(A)$ pot fi definite și pentru matrice $F$ cu $n$ linii și $m$ coloane (respectiv $n$ coloane și $m$ linii) $m \neq n$.

Rezultă că orice șir de transformări elementare asupra liniilor (coloanelor) este echivalent cu înmulțirea la stînga (la dreapta) cu o matrice din $GL_n(A)$, egală cu produsul matricelor elementare corespunzătoare.

*Definiția 1.23.* Matricele $F$ și $G$, $F, G \in M_{n\times m}(A)$ se numesc a) *echivalente pe linii*, b) *echivalente pe coloane*, c) *echivalente*, dacă pot fi obținute una din cealaltă prin transformări elementare: a) asupra liniilor, b) asupra coloanelor c) asupra liniilor și coloanelor.

Dacă $F$ și $G$ sînt echivalente notăm $F \sim G$.

**Teorema 1.5.** Fie $(A, g)$ un inel euclidian și $F$ o matrice nenulă din $M_{n\times m}(A)$. Atunci există o matrice $\bar{F} \in M_{n\times m}(A)$, echivalentă cu $F$, de forma,

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} f_1 & & & & & & \\ & f_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & 0 & \\ & & & f_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & \cdot \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

unde $0 \leqslant r \leqslant \min(n, m)$, $f_i \neq 0$, $i = \overline{1, r}$ și $f_i | f_{i+1}$, $i = \overline{1, r-1}$. Elementele $f_i$ sînt unic determinate pînă la o asociere în divizibilitate. Matricea $\bar{F}$ se numește *formă diagonal canonică* sau *forma canonică Smith* a matricei $F$.

*Demonstrație*, prin inducție după $(n, m)$. Dacă $n = m = 1$, $F = [f_1]$ și teorema este evidentă. O presupunem adevărată pentru matrice din $M_{(n-1)\times(m-1)}(A)$. Fie $F = [f_{ij}]$ nenulă în $M_{n\times m}(A)$. Fie $f_{ij}$ elementul nenul al matricei $F$ cu $g(f_{ij})$ minim. Prin permutări de linii și coloane aducem acest element pe poziția $(1,1)$. Fie $\tilde{F} = [\tilde{f}_{st}] = P_{1i}\,F\,P_{1j}$ matricea obținută astfel din $F$.

Aplicăm teorema împărțirii cu rest din inelul euclidian $A$ elementelor din

prima coloană a matricei $F$, în raport cu elementul $\bar{f}_{11}$ cu $g(\bar{f}_{11})$ minim,

$$\bar{f}_{1i} = q_{1i}\bar{f}_{11} + r_{1i}, \quad i = \overline{2,\dots,n}, \text{ unde } r_{1i} = 0 \text{ sau}$$

$$g(r_{1i}) < g(\bar{f}_{11}).$$

Scădem din linia $i$ a matricei $\widetilde{F}$ linia 1 înmulțită cu $q_{1i}$, deci calculăm $E_{i1}(-q_{1i})\,\widetilde{F}$; prima coloană a noii matrice va avea primul element $\bar{f}_{11} \neq 0$ și celelalte $r_{1i}$. Dacă toate $r_{1i}$ sînt nule, prima coloană va avea toate elementele nule, în afară de $\bar{f}_{11}$; dacă $\exists\ r_{1i} \neq 0$, cu permutări de linii îl aducem pe $r_{1i}$ cu $g(r_{1i})$ minim pe poziția (1.1) și reluăm procedeul; obținem un șir $g(\bar{f}_{11}) > g(r_{1i}) > g(\tilde{r}_{1i}) > \dots$ de numere întregi nenegative, care nu poate fi infinit; după un număr finit de reluări ale teoremei împărțirii cu rest, se ajunge la o matrice în care prima coloană are toate elementele nule cu excepția primului.

Prin operații similare pe coloane se obține 0 pe prima linie a matricei, cu excepția primului element. Deci $F$ a fost adusă la forma

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11} & 0 \\ 0 & F_1 \end{bmatrix},$$

unde $F_1$ este o matrice $(n-1)\times(m-1)$. Conform presupunerii de inducție $F_1$ este echivalentă cu o matrice $\check{F}_1$ în formă diagonal canonică. Efectuînd transformările elementare corespunzătoare lui $F_1$ asupra liniilor și coloanelor respective din $\hat{F}$, aceasta va fi adusă la forma (cu $\check{f}_1 = \hat{f}_{11}$)

$$\check{F} = \left[\begin{array}{c|cccccc} \check{f}_1 & & & & & & \\ \hline & \check{f}_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \check{f}_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right], \text{ cu } \check{f}_i \mid \check{f}_{i+1},\ i = \overline{2, r-1}.$$

Dacă $\check{f}_1$ nu divide pe $\check{f}_2$, aplicăm din nou teorema împărțirii cu rest: $\check{f}_2 = q\check{f}_1 + r$ cu $g(r) < g(\check{f}_1)$. Scădem din linia a doua prima linie, înmulțită cu $q$, și permutăm primele două linii și coloane pentru a-l aduce pe $r$ pe poziția (1.1) și pe $\check{f}_1$ pe poziția (2.2). Dacă $r$ nu divide pe $\check{f}_1$, se reia procedeul și după un număr finit de pași se obțin pe diagonală elementele $\bar{f}_1$ și $\bar{f}_2$ cu $\bar{f}_1 \mid \bar{f}_2$.

Continuînd apoi cu $\bar{f}_2$ și $\check{f}_3$ etc., se ajunge în final la forma diagonal canonică.

*Unicitatea.* Notăm cu $d_k(F)$ c.m.m.d.c. al minorilor de ordin $k$ ai matricei $F$, $1 \leqslant k \leqslant \min(n, m)$; vom utiliza următoarea lemă.

**Lema 1.4.** $d_k(F)$ rămîn neschimbați la transformări elementare asupra liniilor și coloanelor lui $F$ (pînă la o asociere în divizibilitate).

*Demonstrație.* Matricea $F_1 = E_{ij}(a)F$ se obține din $F$ prin adunare la linia $i$ a liniei $j$ înmulțite cu $a \in A$; toți minorii care nu conțin elemente din

linia $i$ au rămas neschimbați. Minorii care conțin elemente din linia $i$ pot fi scriși sub forma $M' + aM''$, unde $M'$, $M''$sînt minorii de ordin $k$ ce au în linia respectivă elementele corespunzătoare liniei $i$, respectiv $j$, din matricea $F$; cum $d_k(F)$ divide pe $M'$ și pe $M''$, va divide și pe $d_k(F_1)$. Din $F = E_{ij}^{-1}(a)F_1 = E_{ij}(-a)F_1$, vom avea și $d_k(F_1) \mid d_k(F)$.

Pentru transformări elementare de tipul II, afirmația este evidentă, iar pentru $F_2 = E_i(a) F$, cu $a \in U_A$ se obține imediat că minorii ce conțin elemente din linia $i$ a matricei $F_2$ sînt egali cu minorii din $F$ înmulțiți cu elementul inversabil $a$, ceilalți rămînînd neschimbați.

Revenim la demonstrarea unicității. Fie $\overline{F}$ (1.15) forma diagonal canonică a matricei $F$. Se observă că minorul format cu primele $k$ linii și coloane din $\overline{F}$ este $f_1 f_2 \ldots f_k$ și, deoarece $f_i | f_{i+1}$, acest minor divide orice alt minor de ordinul $k$ din $\overline{F}$, deci $d_k(\overline{F}) = f_1 f_2 \ldots f_k$, $k = \overline{1, r}$. Din lemă rezultă că $d_k(F)$ este asociat în divizibilitate cu $f_1 f_2 \ldots f_k$, deci $f_k$ este asociat în divizibilitate cu $d_{k+1}(F)/d_k(F)$, de unde rezultă unicitatea.

*Observația 1.5.* Teorema se poate demonstra și în ipoteza că $A$ este numai inel principal; de aici rezultă că $A$ este inel factorial, deci orice element nenul și neinversabil $a \in A$ se reprezintă în mod unic ca un produs finit de elemente ireductibile: $a = a_1 \ldots a_k$; definind funcția $l$ prin $l(a) = k$, $l(u) = 0$, dacă $u \in U_A$, se obține o demonstrație asemănătoare cu cea de mai sus cu funcția $l$ în locul funcției $g$.

**Corolarul 1.9.** $F \in GL_n(A)$, dacă și numai dacă matricea $F$ este un produs finit de matrice elementare.

*Demonstrație.* Dacă $F = \prod_{i=1}^{k} E_i$, unde $E_i$ sînt matrice elementare, atunci

$$|F| = \prod_{i=1}^{k} |E_i| \in U_A, \quad \text{deci } F \in GL_n(A).$$

Invers, dacă $F \in GL_n(A)$, $|F| \in U_A$, deci $d_n(F) \in U_A$, $d_n(F) \sim 1$. Rezultă că toți $d_i(F)$ (care divid pe $d_n(F)$) sînt asociați în divizibilitate cu 1, deci $F$ este echivalentă cu $I_n$; rezultă că $F$ s-a obținut din matricea $I_n$ printr-un număr finit de transformări elementare și $F$ este produsul matricelor elementare corespunzătoare.

Din definiția 1.23 rezultă următoarele.

**Corolarul 1.10.** Matricele $F$ și $G$ din $M_{n \times m}(A)$ sînt a) echivalente pe linii, b) echivalente pe coloane, c) echivalente, dacă și numai dacă există matricele $S \in GL_n(A)$, $D \in GL_m(A)$, astfel încît a) $G = SF$, b) $G = FD$, c) $G = SFD$.

Teorema 1.5 se poate reformula în modul următor.

**Corolarul 1.11.** Fie $A$ un inel euclidian și $F \in M_{n \times m}(A)$. Atunci există $S \in GL_n(A)$, $D \in GL_m(A)$ și $\overline{F} \in M_{n \times m}(A)$, $\overline{F}$ avînd forma diagonal canonică (1.15), astfel încît $\overline{F} = SFD$.

Reluăm demonstrația teoremei 1.5 prin considerarea doar a transformărilor pe linii care aduc pe diagonala principală elemente nenule și apoi sub diagonală elemente nule (sau analog numai a transformărilor pe coloane). În plus, dacă după aceste transformări în noua matrice are loc pentru un $j$ $(g(f_{jj}) < g(f_{ij})$ pentru $i < j$, aplicăm teorema împărțirii cu rest: $f_{ij} = q f_{jj} + r$ cu $r = 0$ sau $g(r) < g(f_{jj})$, scădem din linia $i$ linia $j$ înmulțită cu $q$ și pe poziția $(i, j)$ va rămîne $r$. Repetăm procedeul pînă cînd deasupra diagonalei principale rămîn elemente cu $f_{ij} = 0$ sau $g(f_{ij}) < g(f_{jj})$, $i < j$. Obținem astfel următoarea teoremă.



Scanned with OKEN Scanner

**Teorema 1.6.** Fie $(A, g)$ un inel euclidian şi $F \in M_{n \times m}(A)$. Atunci există $S \in GL_m(A)$, astfel încît $\hat{F} = SF$, unde $\hat{F} \in M_{n \times m}(A)$ este în forma canonică superior triunghiulară

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} & \dots & \hat{f}_{1m} \\ 0 & \hat{f}_{22} & \dots & \hat{f}_{2m} \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 \dots 0 \hat{f}_{nn} & \dots & \hat{f}_{nm} \end{bmatrix}, \text{ dacă } n \leqslant m$$

sau

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} & \dots & \hat{f}_{1m} \\ 0 & \hat{f}_{22} & \dots & \hat{f}_{2m} \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \hat{f}_{mm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ dacă } n > m.$$

În plus, $\hat{f}_{ij} = 0$ sau $g(\hat{f}_{ij}) < g(\hat{f}_{jj})$, pentru $i < j$, $i < n$, $j \leqslant m$.

Analog, există $D \in GL_m(A)$, astfel încît $\tilde{F} = FD$ şi $\tilde{F} \in M_{n \times m}(A)$ este în forma canonică inferior triunghiulară. Aceste forme canonice se mai numesc şi forme canonice Hermite. Ele pot fi obţinute şi în ipoteza în care $A$ este inel principal.

Vom extinde la inelul necomutativ $M_n(A)$ şi chiar la matrice dreptunghiulare unele noţiuni referitoare la divizibilitate, introduse în 1.1.2.

*Definiţia 1.24.* Fie $A$ un inel comutativ şi unitar şi $F \in M_{n \times m}(A)$, $G \in M_{n \times p}(A)$, $H \in M_{p \times m}(A)$. Dacă $F = GH$, matricea $G$ $(H)$ se numeşte *divizor stîng* (*drept*) al matricei $F$ şi $F$ se numeşte *multiplu* drept (stîng) al matricei $G$ $(H)$.

Dacă matricele $F_1$ şi $F_2$ au acelaşi număr de linii $(n)$, atunci se numeşte *cel mai mare divizor comun stîng* (sau la stînga) (c.m.m.d.c.s.) al matricelor $F_1$ şi $F_2$ matricea $G$ care este divizor stîng al matricelor $F_1$ şi $F_2$ şi orice divizor stîng comun al lui $F_1$ şi $F_2$ este divizor stîng al lui $G$.

Analog se defineşte *cel mai mare divizor comun drept* (sau la dreapta) c.m.m.d.c.d. al matricelor $F_1$ şi $F_2$ (care au acelaşi număr $m$ de coloane).

**Teorema 1.7.** Fie $A$ un inel euclidian. Oricare două matrice $F_1 \in M_{n \times m_1}(A)$, $F_2 \in M_{n \times m_2}(A)$ au un c.m.m.d.c.s. $G$ care poate fi reprezentat sub forma

$$G = F_1 P_1 + F_2 P_2, \tag{1.16}$$

unde $P_1$ şi $P_2$ sînt matrice cu elemente din $A$.

*Demonstraţie.* Din teorema 1.6 există $D \in GL_m(A)$, cu $m = m_1 + m_2$, astfel încît $\tilde{F} = [F_1\ F_2]D$, cu $\tilde{F}$ în forma canonică inferior triunghiulară. Dacă $m > n$, atunci

$$[F_1\ F_2]D = [G\ 0] \text{ şi } [F_1\ F_2] = [G\ 0]\ D^{-1}, \tag{1.17}$$

unde

$$G = \begin{bmatrix} f_{11} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ f_{n_1} & & & f_{nn} \end{bmatrix}.$$

Partiționînd

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} \\ D'_{21} & D'_{22} \end{bmatrix},$$

cu $D_{11}$, $D'_{11} \in M_n(A)$, obținem din a doua relație (1.17)

$$[F_1 \quad F_2] = [G\,D_{11} \quad GD_{12}] \tag{1.18}$$

deci $G$ este divizor comun stîng al lui $F_1$ și $F_2$.

Din prima relație (1.17) $F_1 D'_{11} + F_2 D'_{21} = G$, deci orice divizor comun stîng al lui $F_1$ și $F_2$ va fi divizor stîng al lui $G$; rezultă că $G$ este c.m.m.d.c.s. al matricelor $F_1$ și $F_2$ și că are loc relația (1.16).

Dacă $m \leqslant n$, atunci $G = [F_1\,F_2]\,D$, unde $G = \begin{bmatrix} f_{11} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ f_{m1} & & & f_{mm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & & & f_{nm} \end{bmatrix}$.

Partiționînd $D^{-1} = [D_1\,D_2]$ cu $D_i \in M_{m\times m_i}(A)$, $i = 1, 2$, obținem $[F_1 \quad F_2] = [G\,D_1 \quad GD_2]$, deci $G$ este divizor comun stîng al lui $F_1$ și $F_2$. Dacă $G'$ este alt divizor comun stîng, atunci există $D'_1$, $D'_2$, încît $F_1 = G'D'_1$, $F_2 = G'\,D'_2$, de unde $G = [F_1 \quad F_2]\,D = [G'D'_1 \quad G'D'_2]\,D = G'\,[D_1 \quad D_2]\,D$, deci $G'$ este divizor stîng al lui $G$. Partiționînd acum $D = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$, din $G = [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ se obține (1.16).

**Corolarul 1.12.** Dacă matricea $F_1$ este nesingulară, atunci c.m.m.d.c.s. $G$ din teorema 1.7 este matrice nesingulară.

*Demonstrație.* Din relațiile (1.17) $F_1 = G\,D_{11}$ (cu $F_1$, $G$, $D_{11} \in M_n(A)$), deci $0 \neq |F_1| = |G|\,|D_{11}|$ implică $|G| \neq 0$.

**Corolarul 1.13.** Dacă matricele $F_1$ și $F_2$ au un c.m.m.d.c.s. nesingular $G$, atunci orice alt c.m.m.d.c.s. este de forma $GD$, cu $D \in GL_n(A)$.

*Definiția 1.25.* Se spune că matricele $F_1$ și $F_2$ cu $n$ linii ($m$ coloane) sînt *relativ prime* (sau *coprime*) *la stînga* (la dreapta) dacă c.m.m.d.c.s. (c.m.m.d.c.d.) al lor este o matrice din $GL_n(A)$ ($GL_m(A)$).

**Teorema 1.8.** Fie $A$ un inel euclidian. Matricele $F_1$ și $F_2$ cu $n$ linii și elemente din $A$ sînt relativ prime la stînga, dacă și numai dacă există matricele $Q_1$ și $Q_2$ cu elemente din $A$ astfel încît

$$I = F_1Q_1 + F_2Q_2. \tag{1.19}$$

*Demonstrație.* Dacă $F_1$ și $F_2$ sînt relativ prime la stînga, atunci ele au un c.m.m.d.c.s. $H \in GL_n(A)$ și $G$ din teorema 1.7 se poate scrie $G = HD$ cu $D \in GL_n(A)$, deci $G \in GL_n(A)$. Din relația (1.16) obținem $I = F_1 P_1 G^{-1} + F_2 P_2 G^{-1}$, deci (1.19) cu $Q_i = P_i G^{-1}$, $i = 1, 2$.

Reciproc, dacă $I = F_1Q_1 + F_2Q_2$ și $G_1 \in M_n(A)$ este un divizor comun la stînga al lui $F_1$ și $F_2$, deci $F_i = G_1D_i$, $i = 1, 2$, obținem $I = G_1 (D_1 Q_1 + D_2 Q_2)$, deci $1 = |G_1| \, |D_1Q_1 + D_2Q_2|$, deci $G_1 \in GL_n(A)$ și $F_1, F_2$ sînt relativ prime la stînga.

Prin dualitate, pot fi obținute teoreme similare pentru c.m.m.d.c.d. sau pentru matrice relativ prime la dreapta, utilizînd forma canonică superior triunghiulară; relațiile (1.16) și (1.19) devin

$$G = P_1 F_1 + P_2 F_2, \tag{1.16'}$$

$$I = Q_1 F_1 + Q_2 F_2. \tag{1.19'}$$

Rezultatele de mai sus pot fi demonstrate și în ipoteza „$A$ inel principal", în loc de „$A$ inel euclidian".

## 1.4. Matrice polinomiale

### 1.4.1. Matrice polinomiale 1D

Considerăm mulțimea matricelor cu $n$ linii și $m$ coloane, cu elemente polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ $K$ $M_{n\times m}(K[z])$; elementele ei se numesc matrice polinomiale (1D). Deoarece $K[z]$ este inel euclidian (propoziția 1.16), toate teoremele din § 1.2.2. referitoare la matrice peste inele euclidiene sînt adevărate în această mulțime. Unitățile din $K[z]$ sînt elemente nenule din $K$ (propoziția 1.15).

*Definiția 1.26.* O matrice $U \in M_n(K[z])$ se numește *unimodulară*, dacă $U$ se poate obține din matricea $I_n$ prin transformări elementare.

Evident matricele elementare $E_{ij}(a)$, $a \in K[z]$, $P_{ij}$ și $E_i(a)$, $a \in K$ sînt matrice unimodulare. Din corolarul 1.9 rezultă că o matrice $U$ este unimodulară, dacă și numai dacă $U \in GL_n(K[z])$, deci (propoziția 1.24) dacă și numai dacă $|U|$ este element nenul din $K$; rezultă că inversa unei matrice unimodulare este o matrice unimodulară. Transcriind în cazul $A = K[z]$ teoremele din § 1.2.2, obținem următoarele rezultate, deosebit de utile în teoria sistemelor 1D:

**Teorema 1.9.** Dacă $F$ este o matrice nenulă din $M_{n\times m}(K[z])$, atunci există matricele unimodulare $S$ și $D$, de ordinul $n$, respectiv $m$, astfel încît

$$SFD = \bar{F} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 & & & & & \\ & f_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & f_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

unde $0 \leqslant r \leqslant \min\ (n, m)$, $f_i \in K[z] \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, r}$, $f_i \,|\, f_{i+1}$, $i = \overline{1, r-1}$. Polinoamele $f_i$ sînt unice pînă la un factor multiplicativ nenul din $K$.

Matricea $F$ se numește *forma diagonal canonică* sau *forma canonică Smith* a matricei $F$.

Polinoamele $f_i$ se numesc *factorii invarianți* ai matricei $F$ și pot fi calculate cu formula $f_i = \dfrac{d_{i+1}(F)}{d_i(F)}$, unde $d_i(F)$ este c.m.m.d.c. al minorilor de ordin $i$ ai matricei $F$; rezultă

$$d_k(F) = c f_1 f_2 \ldots f_k, \text{ unde } c \in K \setminus \{0\}.$$

**Teorema 1.10.** Dacă $F \in M_{n \times m}(K[z])$, atunci există matricele unimodulare $S$ și $D$ de ordinul $n$, respectiv $m$, astfel încît $\hat{F} = SF$ și $\tilde{F} = FD$ sînt respectiv matrice superior triunghiulară și inferior triunghiulară (formă canonică Hermite),

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11} & \cdots & & \hat{f}_{1m} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & \hat{f}_{nn} & \cdots \ \hat{f}_{nm} \end{bmatrix}, \text{ dacă } n \leqslant m,$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11} & \cdots & \hat{f}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \\ & & \hat{f}_{mm} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \end{bmatrix}, \text{ dacă } n > m. \tag{1.21}$$

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{f}_{11} & & 0 & \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \tilde{f}_{n1} & \cdots & \tilde{f}_{nn} & \end{array}\right], \text{ dacă } n \leqslant m,$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \tilde{f}_{m1} & \cdots & \tilde{f}_{mm} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_{n1} & \cdots & \tilde{f}_{nm} \end{bmatrix}, \text{ dacă } n > m. \tag{1.22}$$

**În plus,** $\hat{f}_{ij} = 0$ sau $\delta(\hat{f}_{ij}) < \delta(\hat{f}_{jj})$, pentru $i < j$,

$$\tilde{f}_{ij} = 0 \text{ sau } \delta(\tilde{f}_{ij}) < \delta(\tilde{f}_{ii}), \text{ pentru } j < i.$$



Scanned with OKEN Scanner

**Teorema 1.11.** Orice două matrice polinomiale cu același număr de linii (coloane) au un c.m.m.d.c.s. (c.m.m.d.c.d.) care poate fi reprezentat sub forma

$$G = F_1P_1 + F_2P_2 \quad (G = P_1F_1 + P_2F_2), \tag{1.23}$$

cu $P_1$, $P_2$ matrice polinomiale.

**Corolarul 1.14.** Dacă $F_1$ este o matrice nesingulară, c.m.m.d.c.s. $G$ din teorema 1.11 este matrice nesingulară.

**Corolarul 1.15.** Dacă matricele $F_1$ și $F_2$ au un c.m.m.d.c.s. (c.m.m.d.c.d) $G$ și $G$ este matrice nesingulară, atunci orice alt c.m.m.d.c.s. (c.m.m.d.c.d.) este de forma $GD$ ($SG$) cu $D$ ($S$) matrice unimodulară.

**Teorema 1.12** (Identitatea lui Bézout). Matricele polinomiale $F_1$ și $F_2$ sînt relativ prime la stînga (la dreapta), dacă și numai dacă există matricele polinomiale $Q_1$ și $Q_2$, astfel încît

$$I = F_1Q_1 + F_2Q_2 \quad (I = Q_1F_1 + Q_2F_2). \tag{1.24}$$

În continuare vom considera mulțimea matricelor polinomiale cu coeficienți într-un inel integru $A$. Conform propoziției 1.17, inelul $A[z]$ nu este inel principal și deci nu este nici inel euclidian. În acest caz, teoremele 1.9 și 1.10 nu mai sînt valabile; în locul lor vom obține următoarele rezultate.

**Teorema 1.13.** Dacă $F \in M_{n\times m}(A[z])$, atunci există $S \in M_n(A[z])$, $D \in M_n(A[z])$ cu $|S|$, $|D| \in A\setminus\{0\}$, astfel încît

$$SFD = \overline{F} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & f_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \end{bmatrix}, \tag{1.25}$$

unde $0 \leqslant r \leqslant \min(n, m)$, $f_i \in A[z]\setminus\{0\}$, $i = \overline{1, r}$, $f_i | f_{i+1}$, $i = \overline{1, r-1}$.

*Demonstrație.* $A$ fiind inel integru, fie $K$ corpul său de fracții (propoziția 1.13). Cum $A$ este subinel al lui $K$, putem considera $F$ matrice polinomială cu elemente din $K[z]$; din teorema 1.9 există matricele unimodulare $S_1$ și $D_1$, încît $S_1FD_1 = \widetilde{F}$ este în forma diagonal canonică cu elementele $\tilde{f}_i$ pe diagonala principală. Fie $s_i \in A$ ($d_i \in A$) cel mai mare numitor comun al coeficienților polinoamelor $s_{ik}(z)$ din linia $i$ a matricei $S_1$ (din coloana $j$ a matricei $D_1$) și $s_1^* = s_1$, $s_i^* = \text{c.m.m.m.c.}(s_{i-1}^*, s_i)$, $d_1^* = d_1$, $d_j^* = \text{c.m.m.m.c.}(d_{j-1}^*, d_j)$. Notăm cu $S$ ($D$) matricea $S = \{\text{diag } s_i^*\}S_1$ ($D = \{\text{diag } d_j^*\}D_1$). Evident $S$ și $D$ sînt matrice cu elemente $s_i^* s_{ik}(z) \in A[z]$, respectiv $d_j^* d_{ij}(z) \in A[z]$ și $|S| = |S_1| \prod_{i=1}^{n} s_i^* \in A$, $|D| = |D_1| \prod_{i=1}^{m} d_j^* \in A$, deoarece $S_1$ și $D_1$ sînt unimodulare.

Înmulțind egalitatea $S_1FD_1$ la stînga cu $\{\text{diag } s_i^*\}$ și la dreapta cu $\{\text{diag } d_j^*\}$, obținem relația

$$SFD = \{\text{diag } s_i^*\}\, \widetilde{F}\, \{\text{diag } d_j^*\} \triangleq \overline{F}.$$



Scanned with OKEN Scanner

Matricea $SFD$ este matrice polinomială, deci și $\bar{F}$ este matrice polinomială de forma (1.25), cu elementele $f_i = s_i^* f_i d_i^*$ și $f_i | f_{i+1}$.

**Teorema 1.14.** Dacă $F \in M_{n \times m}(A[z])$, atunci există $S \in M_n(A[z])$ și $D \in M_m(A[z])$, cu $|S| \in A \setminus \{0\}$, $|D| \in A \setminus \{0\}$, astfel încît $\hat{F} = SF$ și $\tilde{F} = FD$ sînt matrice cu elemente polinoame din $A[z]$, respectiv superior triunghiulară și inferior triunghiulară (de forma (1.21) respectiv (1.22)).

*Demonstrație.* Considerînd $F \in M_{n \times m}(K[z])$, unde $K$ este corpul fracțiilor inelului integru $A$, putem aplica teorema 1.10 : există o matrice unimodulară $S_1 = [s_{ij}(z)] \in M_n(K[z])$, astfel încît $\hat{F}_1 = S_1 F$ este în forma superior triunghiulară (1.21) ; notăm cu $s_i$ ($s_i \in A$) cel mai mare numitor comun al coeficienților polinoamelor $s_{ik}(z)$ din linia $i$ a matricei $S_1$, cu $\hat{F}$ matricea $\hat{F} = \{\text{diag } s_i\} \hat{F}_1$ și cu $S$ matricea $S = \{\text{diag } s_i\} S_1$. Atunci $S \in M_n(A[z])$, deoarece are elementele $s_i s_{ik}(z) \in A[z]$ și are loc egalitatea $\hat{F} = SF$, obținută din $F_1 = S_1 F$ prin înmulțire la stînga cu $\{\text{diag } s_i\}$. Rezultă că $SF$ este matrice cu elemente polinoame din $A[z]$, deci și $\hat{F}$ are această proprietate și în plus $\hat{F}$ este în forma canonică superior triunghiulară.

Analog se obține forma canonică inferior triunghiulară.

### 1.4.2. Matrice polinomiale 2D

În teoria sistemelor liniare 2D instrumentul algebric principal îl constituie mulțimea matricelor cu elemente polinoame în două variabile, numite *matrice polinomiale 2D*. Deosebirea esențială față de cazul 1D îl constituie faptul că inelul integru $K[z_1, z_2]$ al coeficienților nu este inel principal și deci nu este nici inel euclidian (corolarul 1.6).

Abordarea cazului 2D se poate face prin reducerea la cazul 1D, considerînd inelul $K[z_1]\,[z_2]$ ca subinel al lui $K(z_1)\,[z_2]$, care este inel principal, deoarece $K(z_1)$ este corp ; în acest caz, pentru matricele cu elemente din $K(z_1)\,[z_2]$ au loc teoremele din § 1.4.1. ; matricele unimodulare vor fi matricele $U$ din $K(z_1)\,[z_2]$, cu $|U|$ element nenul din $K(z_1)$. Acest mod de abordare are neajunsul că reduce aria rezultatelor și aplicațiilor sistemelor 2D, ceea ce impune studiul specific al matricelor polinomiale 2D.

Inelul $K[z_1, z_2] = K\,[z_1]\,[z_2]$ fiind inel de polinoame cu coeficienți în inelul integru $K(z_1)$ (propoziția 1.14), putem aplica teoremele 1.13 și 1.14 și obținem formele canonice Smith și superior (inferior) triunghiulară peste $K[z_1]\,[z_2]$.

**Teorema 1.15.** Dacă $F$ este matrice 2D cu $n$ linii și $m$ coloane, atunci există matricele 2D $S_1$ și $S_2$ de ordine $n$, respectiv $m$, cu $|S_i| = s_i(z_1) \in K[z_1] \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$, astfel încît

$$S_1 F S_2 = \bar{F} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & f_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \end{bmatrix},$$

unde $0 \leqslant r \leqslant \min(n, m)$ ; $f_i$ sînt polinoame nenule 2D și $f_i | f_{i+1}$, $i = \overline{1, r-1}$.

**Teorema 1.16.** Dacă $F$ este matrice 2D, atunci există matricele 2D $S_1$ și $S_2$ care au determinanții polinoame nenule din $K[z_1]$, astfel încît $\hat{F} = S_1 F$

și $\widetilde{F} = F S_2$ sînt matrice 2D respectiv superior și inferior triunghiulară, de forma (1.21), respectiv (1.22), cu $\delta_{z_2}(\widetilde{f}_{ij}) < \delta_{z_2}(\widetilde{f}_{ii})$, pentru $i < j$.

Analog se obțin forma Smith și superior (inferior) triunghiulară peste $K[z_2][z_1]$, care în general diferă de cele peste $K[z_1][z_2]$.

Pentru a putea aplica metodele polinomiale ale lui Rosenbrock, este necesară caracterizarea matricelor relativ prime (legată de noțiunile de controlabilitate și observabilitate) precum și determinarea c.m.m.d.c.s. (d.) pentru obținerea unor realizări minimale. Acestea au fost realizate în [2], pe baza noțiunii de matrice polinomială primitivă, introdusă ca o generalizare a definiției polinoamelor primitive (vezi definiția 1.15).

Fie $K$ un corp și $\bar{K}$ închiderea sa algebrică. Vom spune că o matrice $F(z) \in M_{n\times m}(K[z])$ este de rang maxim, dacă există un minor al lui $F(z)$ de ordin min $(n, m)$, egal cu un polinom nenul din $K[z]$. Analog se definesc matricele de rang maxim din $K[z_1, z_2]$.

*Definiția 1.27.* Se spune că o matrice $F(z_1, z_2) \in M_{n\times m}(K[z_1, z_2])$ este *primitivă* în $K[z_2][z_1]$, dacă c.m.m.d.c. al minorilor de ordin $k = \min(n, m)$ este polinom primitiv în $K[z_2][z_1]$.

Am notat în § 1.4.1 cu $d_i(F)$ c.m.m.d.c. al minorilor de ordin $i$ ai matricei $F$; cum $d_i(F) \mid d_{i+1}(F)$, $i = \overline{1, k-1}$ și $F$ este primitivă, dacă $d_k(F)$ este polinom primitiv, rezultă următoarele.

**Propoziția 1.25.** Matricea $F$ este primitivă în $K[z_2][z_1]$, dacă și numai dacă toți $d_i(F)$, $i = \overline{1, k-1}$ sînt polinoame primitive în $K[z_2][z_1]$.

**Propoziția 1.26.** Matricea $F$ este primitivă în $K[z_2][z_1]$, dacă și numai dacă factorii săi invarianți $f_i$ sînt polinoame primitive în $K[z_2][z_1]$.

Demonstrația se obține imediat din relația $d_k(F) = c f_1 f_2 \ldots f_k$, unde $c \in K \setminus \{0\}$.

Dacă $F$ este matrice pătrată, conform definiției 1.27 ea este primitivă, dacă determinantul matricei este polinom primitiv.

Evident definiția 1.27 este o generalizare a noțiunii de polinom primitiv (cazul $n = m = 1$). Avantajul definiției 1.27 față de definiția matricelor primitive dată în [2] este că ea funcționează și în corpuri care nu sînt algebric închise; aceasta va permite de exemplu, să se obțină factorizări primitive reale pentru matrice polinomiale cu coeficienți reali și nu factorizări complexe cum ar rezulta din cerința de a lucra într-un corp algebric închis. Legătura dintre cele două definiții este scoasă în evidență de următoarea propoziție.

**Propoziția 1.27.** Matricea $F(z_1, z_2)$ este primitivă în $K[z_2][z_1]$, dacă și numai dacă $\forall z_{20} \in \bar{K}$, matricea $F(z_1, z_{20})$ este de rang maxim.

*Demonstrație.* Presupunem $n \leqslant m$. Dacă $F(z_1, z_2)$ este primitivă în $K[z_2][z_1]$, rezultă că există minori de ordin $n$ diferiți de polinomul nul. Dacă ar exista $z_{20} \in \bar{K}$ care să anuleze toți acești minori, $z_{20}$ ar anula și cel mai mare divizor comun $f(z_1, z_2)$ al lor (care există deoarece $K(z_1, z_2)$ este inel factorial (conform teoremei 1.4). Fie $p(z_2) \in K[z_2]$ polinomul de grad minim care are rădăcina $z_{20}$. Scriem $f(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{k} f_i(z_2) z_1^i$; din $f(z_1, z_{20}) = 0$ rezultă $f_i(z_{20}) = 0$, $i = \overline{1, k}$, deci $p \mid f_i$, ceea ce contrazice faptul că $f$ este polinom primitiv.

Dacă $F(z_1, z_2)$ nu este primitivă, atunci sau toți minorii de ordin $n$ sînt nuli sau există un c.m.m.d.c. al lor de forma $f(z_1, z_2) = p(z_2) f^*(z_1, z_2)$ cu $\delta(p) \geqslant 1$. Polinomul $p(z_2)$ are o rădăcină $z_{20}$ în $\bar{K}$, deci $F(z_1, z_{20})$ nu este de rang maxim.

În cazul în care $K$ este corp algebric închis, $\bar{K} = K$ și conform propoziției 1.27 definiția primitivității coincide cu cea din [2].



Scanned with OKEN Scanner

Fie $K$ un corp, $K_1$ o extindere a sa şi $L \subset K_1$. Intersecţia tuturor subcorpurilor lui $K_1$ care conţin pe $K \cup L$ este un subcorp al lui $K_1$ care se notează $K(L)$, este extindere a lui $K$ şi conţine pe $L$; se spune că acest corp se obţine prin adjuncţionarea la $K$ a elementelor lui $L$; în particular, pentru $a \in K_1$, $K(a)$ este corpul obţinut prin adjuncţionarea la $K$ a lui $a$.

**Lema 1.5.** Fie $A, B, C, D$ matrice polinomiale 2D peste $K[z_1, z_2]$, de dimensiuni respectiv $n \times n$, $n \times m$, $n \times p$, $p \times m$ cu $n \leqslant m$ $p \leqslant m$. Dacă

1° $AB = CD$,

2° $|A| \in K[z_2] \setminus \{0\}$,

3° $D$ este primitivă în $K[z_2][z_1]$,

atunci matricea $A^{-1}C$ este matrice polinomială.

*Demonstraţie*. Presupunem prin absurd că matricea $E = A^{-1}C$ nu este polinomială, deci conform ipotezei 2° are cel puţin o linie $i$ cu elemente fracţii raţionale avînd la numitor polinoame în $z_2$; deci linia $i$ are forma

$$\left[\frac{e_1(z_1, z_2)}{g(z_2)} \cdots \frac{e_p(z_1, z_2)}{g(z_2)}\right],$$

unde $g(z_2)$ este cel mai mic numitor comun al fracţiilor din linia $i$; fie $z_{20} \in \overline{K}$ o rădăcină a lui $g(z_2)$; atunci $g(z_2) = (z_2 - z_{20})\, g_1(z_2)$ cu $g_1 \in K_1[z_2]$, unde $K_1$ este extinderea corpului $K$, $K_1 = K(z_{20})$; $e_j(z_1, z_{20})$ nu sînt toate nule (din definiţia lui $g$). Considerăm matricea

$$\begin{bmatrix} e_1(z_1, z_{20}) & \cdots & e_p(z_1, z_{20}) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Din teorema 1.10 există o matrice unimodulară $T \in K_1[z_1]$, astfel încît $\bar{E}T$ este inferior triunghiulară, deci are prima linie $[f_1(z_1)\, 0 \ldots 0]$ cu $f_1(z_1) \neq 0$.

Atunci matricea $\tilde{E} = ET$ are linia $i$

$$\left\{\frac{\tilde{e}_1(z_1, z_2)}{(z_2 - z_{20})\, g_1(z_2)}\ \frac{\tilde{e}_2(z_1, z_2)}{(z_2 - z_{20})\, g_1(z_2)} \cdots \frac{\tilde{e}_p(z_1, z_2)}{(z_2 - z_{20})\, g_1(z_2)}\right\}, \tag{1.26}$$

cu $\tilde{e}_1(z_1, z_{20}) = f_1(z_1) \neq 0$, $\tilde{e}_2(z_1, z_{20}) = 0, \ldots, \tilde{e}_p(z_1, z_{20}) = 0$.

Din $AB = CD$ rezultă

$$B = A^{-1}CD = ED = ETT^{-1}D = \tilde{E}T^{-1}D. \tag{1.27}$$

Fie $b_i$, $d_i$ linia $i$ a matricei $B$, respectiv $T^{-1}D$. Din (1.27)

$$b_i(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\tilde{e}_j(z_1, z_2)}{(z_2 - z_{20})\, g_1(z_2)}\, d_j(z_1, z_2)$$



Scanned with OKEN Scanner

şi

$$(z_2 - z_{20})\, g_1(z_2)\, b_i(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{r} \tilde{e}_j(z_1, z_2)\, d_j(z_1, z_2).$$

Pentru $z_2 = z_{20}$ această relaţie devine $0 = e_1(z_1, z_{20})\, d_1(z_1, z_{20})$, de unde prima linie a matricei $T^{-1} D$ verifică $d_1(z_1, z_{20}) = 0$ şi deci orice minor de ordin $p$ al lui $T^{-1}D$ se anulează pentru $z = z_{20}$; deoarece $T(z_1)$ este unimodulară, aceeaşi proprietate o va avea şi matricea $D$, contradicţie cu ipoteza $D$ primitivă.

**Teorema 1.17** (de factorizare primitivă la stînga peste $K[z_2]\,[z_1]$). Fie $F(z_1, z_2) \in M_{n\times m}(K[z_1, z_2])$ de rang maxim $n \leqslant m$. Atunci există $\bar{F}(z_1, z_2) \in M_n(K[z_1, z_2])$ şi $F^*(z_1, z_2) \in M_{n\times m}(K[z_1, z_2])$, astfel încît

$$|\bar{F}(z_1, z_2)| = \bar{f}(z_2) \in K[z_2];$$

$$F^*(z_1, z_2) \text{ este primitivă în } K[z_2]\,[z_1],$$

$$F(z_1, z_2) = \bar{F}(z_1, z_2)\, F^*(z_1, z_2); \tag{1.28}$$

$\bar{F}$ şi $F^*$ sînt unice pînă la înmulţirea la dreapta, respectiv la stînga, cu o matrice unimodulară, respectiv cu inversa ei.

*Demonstraţie*. Existenţa. Dacă $F$ este primitivă, rezultatul este evident cu $\bar{F} = I_n$ şi $F^* = F$. Dacă $F$ nu este primitivă, fie $d_n(F) = \bar{f}(z_2) f^*(z_1, z_2)$ c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul $n$ ai matricei $F$, unde $f^*$ este polinom primitiv în $K[z_2]\,[z_1]$ şi $\delta(\bar{f}) \geqslant 1$.

Fie $\bar{f}(z_2) = \prod_{i=1}^{s} f_i(z_2)$ descompunerea lui $f(z_2)$ în factori ireductibili. Considerăm polinomul ireductibil $f_1(z_2)$ şi rădăcinile sale $z_{2j} \in \bar{K}$, $j = \overline{1, k}$, unde $k = \delta(f_1)$. Matricea $F(z_1, z_{21})$ are ca elemente polinoame din $\bar{K}[z_1]$. Conform teoremei 1.10 există o matrice unimodulară $S(z_1) \in M_n(\bar{K}[z_1])$, astfel încît matricea $S(z_1)\, F(z_1, z_{21})$ este în forma superior triunghiulară.

Deoarece $F(z_1, z_{21})$ nu este de rang maxim, ultima linie a formei superior triunghiulare este nulă, deci ultima linie a matricei $S(z_1)\, F(z_1, z_2)$ are forma

$$[(z_2 - z_{21})\, e_1(z_1, z_2) \ldots (z_2 - z_{21})\, e_m(z_1, z_2)].$$

Rezultă $S_1(z_1)\, F(z_1, z_2) = E_n(z_{21})\, F_1(z_1, z_2)$, unde

$$E_n(z_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & z_2 - z_{21} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} j, \ j = \overline{1, n}$$

şi $F_1(z_1, z_2)$ are primele $n-1$ linii identice cu cele ale matricei $S_1(z_1)\, F(z_1, z_2)$, iar ultima linie este $[e_1(z_1, z_2) \ldots e_m(z_1, z_2)]$. Notînd matricea $S_1^{-1}(z_1)\, E_n(z_{21})$ cu $G_1(z_1, z_2)$, obţinem

$$|G_1(z_1, z_2)| = |S_1^{-1}(z_1)|\, |E_n(z_{21})| = z_2 - z_{21}$$

și

$$F(z_1, z_2) = S^{-1}(z_1)\, E_n(z_{21})\, F_1(z_1, z_2) = G_1(z_1, z_2)\, F_1(z_1, z_2).$$

Reluînd procedeul pentru matricea $F_1(z_1, z_2)$ etc., va rezulta factorizarea (1.28) $\left(\text{cu } \overline{F} = \prod_{j=1}^{k} G_j,\ F^* = F_k\right)$:

$$F(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{k} G_j(z_1, z_2)\, F_k(z_1, z_2), \tag{1.29}$$

unde

$$|\overline{F}(z_1, z_2)| = \prod_{j=1}^{k} |G_j(z_1, z_2)| = \prod_{j=1}^{k} (z_2 - z_{21}) = f_1(z_2)$$

și c.m.m.d.c. al minorilor de ordin $m$ ai matricei $F_k(z_1, z_2)$ este $\prod_{i=2}^{s} f_i(z_2) f^*(z_1, z_2)$.

Deoarece elementele matricei $F(z_1, z_2)$ sînt polinoame în $z_1$, $z_2$ peste $K$, coeficienții acestora pot fi exprimați ca produse de elemente din $K$ și polinoame simetrice fundamentale în $z_{21}, \ldots, z_{2k}$ $(s_1 = z_{21} + \ldots + z_{2k})$, $s_2 = z_{21}z_{22} + \ldots + z_{2k-1}z_{2k}, \ldots, s_k = z_{21} \ldots z_{2k})$. Din această simetrie rezultă că efectuînd exact aceleași operații ca mai sus, dar schimbînd ordinea rădăcinilor $z_{2j}$, vom obține o factorizare similară celei din (1.29), cu aceeași matrice $F_k(z_1, z_2)$. Se mai observă că în operațiile de mai sus matricele $S_1(z_1)$ și $E_n(z_{21})$ au coeficienții polinoamelor în extinderea $K(z_{21})$ a corpului $K$ și deci $F_1(z_1, z_2)$ are aceeași proprietate ș.a.m.d., iar $F_k(z_1, z_2)$ va avea ca elemente polinoame cu coeficienți din extinderea $K(z_{21}, \ldots, z_{2k}) \subset \overline{K}$ a corpului $K$; din discuția anterioară rezultă că acești coeficienți sînt polinoame simetrice în $z_{21}, \ldots, z_{2k}$, deci de forma $g(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, adică se exprimă prin coeficienții polinomului $f_1$, care sînt din $K$. Prin urmare, matricea $F_k(z_1, z_2)$ are elementele din $K[z_1, z_2]$, deși $G_1, F_1, G_2, F_2$ etc. au ca elemente polinoame cu coeficienți din $K(z_{21}, \ldots, z_{2k})$. Rescriind (1.29) sub forma $F(z_1, z_2) = \widetilde{G}_1(z_1, z_2)\, \widetilde{F}_1(z_1, z_2)$, cu $\widetilde{G}_1 = \prod_{j=1}^{k} G_j$, $\widetilde{F}_1 = F_k$, rezultă că și $\widetilde{G}_1(z_1, z_2)$ are elementele cu coeficienți din corpul $K$ și nu din extinderea lui $K$.

Se reia procedeul pentru $\widetilde{F}_1$ și factorul ireductibil $f_2(z_2)$ etc. După un număr finit de reluări se obține

$$F = \widetilde{G}_1 \ldots \widetilde{G}_s \widetilde{F}_s = \overline{F} F^*,$$

care este factorizarea din enunț.

*Unicitatea.* Fie două factorizări ale matricei $F$,

$$F = \overline{F}_1 F_1^* = \overline{F}_2 F_2^*,$$

cu $|\overline{F}_1|$, $|\overline{F}_2| \in K[z_2]$ și $F_1^*$, $F_2^*$ primitive. Aplicînd lema 1.5, rezultă că atît matricea $E = \overline{F}_1^{-1} \overline{F}_2$, cît și $E^{-1} = \overline{F}_2^{-1} \overline{F}_1$ sînt polinomiale, deci sînt matrice unimodulare și

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_1 E,\ F_2^* = E^{-1} F_1^*.$$

Prin dualitate se poate obține o factorizare primitivă la dreapta pentru matrice de rang maxim din $M_{n\times m}(K[z_1, z_2])$, cu $m \leqslant n$.

*Exemple:* 1.29. Fie

$$F = \begin{bmatrix} z_1 z_2 - 1 & z_1^2 z_2 + z_1 + 2z_2 \\ -z_2 & -z_1 z_2 + z_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

$F$ nu este matrice primitivă, deoarece $|F| = (z_2^2 + 1)(z_1 z_2 + 1)$. Polinomul $\bar{f}(z_2) = z_2^2 + 1$ are rădăcinile $z_{21} = i$, $z_{22} = -i$. Considerăm matricea

$$F(z_1, i) = \begin{bmatrix} z_1 i - 1 & z_1^2 i + z_1 + 2i \\ -i & -z_1 i - 2 \end{bmatrix}$$

și o aducem la forma superior truinghiulară cu ajutorul matricei unimodulare

$$S_1(z_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ -i & -iz_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece

$$S_1(z_1) F(z_1, i) = \begin{bmatrix} -1 & z_1 + 2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vom avea

$$S_1(z_1)\, F(z_1, z_2) \begin{bmatrix} -1 & z_1 z_2^2 + 2z_2 \\ -z_2 + i & -iz_1 z_2^2 - z_1 z_2 - 2i z_2 + z_2^2 - 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_2 - i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & z_1 z_2^2 + 2z_2 \\ -1 & -iz_1 z_2 + z_2 - 1 \end{bmatrix} = E_2(i)\, F_1(z_1, z_2).$$

Apoi

$$S_2 F_1(z_1, -i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -z_1 - 2i \\ -1 & -z_1 - 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -z_1 - 2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

implică

$$S_2 F_1(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_2 + i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & z_1 z_2^2 + 2z_2 \\ 0 & -z_1 z_2 - 1 \end{bmatrix} = E_2(-i)\, F^*(z_1, z_2).$$

În final,

$$F(z_1, z_2) = \underbrace{S^{-1}(z_1)\, E_2(i) S_2^{-1}(z_1)\, E_2(-i)}\, F^*(z_1, z_2) = \bar{F}(z_1, z_2)\, F^*(z_1, z_2),$$

cu

$$\bar{F}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 - z_1 z_2 & -z_1(z_2^2 + 1) \\ z_2 & z_2^2 + 1 \end{bmatrix}, \quad |\bar{F}| = z_2^2 + 1$$

și

$$|F^*(z_1, z_2)| = z_1 z_2 + 1, \text{ deci } F^* \text{ este matrice primitivă.}$$

1.30. Matricea

$$F = \begin{bmatrix} z_1 z_2^2 + z_1 z_2 + 2z_2^2 - 2z_2 & z_1 z_2 + z_1 + z_2^2 \\ z_1 z_2 + 3z_2 - 2 & z_1 + z_2 + 1 \end{bmatrix}$$

nu este primitivă, deoarece $F = (z_2^2 - 2z_2^2 + 2)(z_1 - z_2) = \bar{f}(z_2) f^*(z_1, z_2)$. Pentru rădăcina $1+i$ a lui $\bar{f}(z_2)$, cu matricea unimodulară

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1-i & 1 \end{bmatrix} \text{ obținem } F(z_1, 1+i)\; S_1 = \begin{bmatrix} 0 & (2+i)z_1 + 2i \\ 0 & z_1 + 2 + i \end{bmatrix},$$

de unde

$$F(z_1, z_2) \begin{bmatrix} (z_2+1)z_1 + (1-i)z_2 & z_1 z_2 + z_1 + z_2^2 \\ z_1 + 2 + i & z_1 + z_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 - 1 - i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = F_1\, E_1(1+i).$$

Analog, pentru $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$F_1(z_1, z_2)\, S_2 = \begin{bmatrix} -z_2 & z_1 z_2 + z_1 + z_2^2 \\ -1 & z_1 + z_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 - 1 + i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = F^*(z_1, z_2)\, E_1(1 - i).$$

Factorizarea primitivă la dreapta va fi

$$F(z_1, z_2) = F^*(z_1, z_2) \underbrace{E_1(1-i)\, S_2^{-1}\, E_1(1+i)\, S_1^{-1}} = F^*(z_1, z_2)\, \overline{F}(z_1, z_2),$$

unde

$$\overline{F}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_2^2 - 2z_2 + 2 & 0 \\ z_2 & 1 \end{bmatrix} \text{ și } F^* = \begin{bmatrix} -z_2 & z_1 z_2 + z_1 + z_2^2 \\ -1 & z_1 + z_2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Aceste factorizări sînt utile pentru determinarea divizorilor comuni ai matricelor 2D (vezi definiția 1.24). Vom spune că două matrice 2D sînt *relativ prime la stînga* (*la dreapta*) peste $K[z_1, z_2]$ dacă c.m.m.d.c.s. (c.m.m.d.c.d.) este o matrice $U$ 2D unimodulară (cu $|U| \in K \setminus \{0\}$); deci matricele nu sînt prime, dacă c.m.m.d.c.s. (d.) este $V$ și $|V|$ este un polinom nenul in $z_1, z_2$ cu $\delta_{z_2}(|V|) > 0$ sau $\delta_{z_1}(|V|) > 0$.

**Propoziția 1.28.** Fie $F$ și $G$ matrice 2D cu același număr de coloane. Fie $\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}$ forma canonică superior triunghiulară a matricei $\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$ și $H = \overline{H}\, H^*$ o factorizare primitivă la stînga a matricei $H$ in $K[z_2][z_1.]$.

Atunci $H^*$ este un divizor comun la dreapta al matricelor $F$ și $G$.

*Demonstrație.* Fie $F$ și $G$ matrice, $n \times m$, respectiv $p \times m$. Din teorema 1.16, există matricea 2D $S$ cu $|S| = s(z_2) \in K[z_2] \setminus \{0\}$, astfel încît

$$S \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Înmulțind la stînga cu $[s(z_2)\, I]\, S^{-1} = \widetilde{S}$ (adjuncta matricei $S$) și partiționînd $\widetilde{S} = [S_1\; S_2]$, obținem

$$[s(z_2)\; I] \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \widetilde{S} \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} = S_1 H = (S_1 \overline{H})\, H^*,$$

unde $|s(z_2) I| = s(z_2)^{n+p} \in K[z_2]$ și $H^*$ este primitivă; aplicînd lema 1.5, va rezulta că matricea $E = [s(z_2) I]^{-1} (S_1 H)$ este polinomială și $\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = E H^*$, deci $H^*$ este divizor comun la dreapta al lui $F$ și $G$.

**Algoritmul 1.1** (de extragere a c.m.m.d.c.d.). Fie $F$ și $G$ matrice polinomiale 2D $n \times m$ și $p \times m$.

1° Dacă rang $\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = m_1 < m$, se determină matricea nesingulară 2D $U$), astfel încît

$$\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ \underbrace{G_1}_{m_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

și $\begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \end{bmatrix}$ are rang maxim $m_1$; fie partiționarea $U^{-1} = \begin{bmatrix} U' \\ U'' \end{bmatrix}$, cu $U'$ matrice $m_1 \times m$.

Dacă $m_1 = m$, algoritmul începe cu instrucțiunea 2°, cu $F, G, I_m$, în loc de $F_1, G_1, U'$.

2° Cu algoritmul de factorizare primitivă la dreapta (duala teoremei 1.10) se determină $F^*, G^*$, astfel încît $\begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix}$ este matrice primitivă și

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix} A. \tag{1.31}$$

3°. Se determină matricea 2D $S$ cu $|S| = s(z_2) \in K[z_2] \setminus \{0\}$ (teorema 1.16) astfel încît

$$S \begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

este în forma canonică superior triunghiulară.

4° Cu algoritmul de factorizare primitivă la stînga (teorema 1.17) se determină $\bar{H}, H^*$, cu $H^*$ primitivă, $|\bar{H}| \in K[z_2] \setminus \{0\}$ și

$$H = \bar{H} H^*. \tag{1.33}$$

5° Matricea $D = H^* A U'$ este c.m.m.d.c.d. al matricelor $F$ și $G$.

*Demonstrație.* Din (1.30) și (1.31) rezultă $F = F^* A U'$, $G = G^* A U'$, deci $D = H^* A U'$ este c.m.m.d.c.d. al matricelor $F$ și $G$, dacă și numai dacă $H^*$ este c.m.m.d.c. al matricelor $F^*$ și $G^*$, ceea ce rămîne de arătat. Din propoziția 1.28 rezultă că $H^*$ este divizor comun la dreapta al lui $F^*$ și $G^*$.

Fie $D^*$ un alt divizor comun la dreapta al lui $F^*$ și $G^*$, deci $F^* = F_2 D^*$, $G^* = G_2 D^*$. Atunci

$$B \triangleq \begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ G_2 \end{bmatrix} D^*,$$

deci orice minor de ordinul $k$ al lui $D^*$ este combinație liniară de minori de ordinul $k$ ai matricei $B$, deci $d_k(D^*) \mid d_k(B)$. Cum $B$ este matrice primitivă, adică $d_k(B)$ este polinom primitiv, rezultă că și $d_k(D^*)$ este polinom primitiv, deci $D^*$ este matrice primitivă.

Partiționăm $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$. Din (1.32) rezultă

$$H = S_1 F^* + S_2 G^* = (S_1 F_2 + S_2 G_2) D^* \quad \text{sau cu} \quad C = S_1 F_2 + S_2 G_2,$$

$$\bar{H}\, H^* = C\, D^*,$$

unde $|\bar{H}| \in K[z_2] \setminus \{0\}$ și $D^*$ este matrice primitivă în $K[z_2][z_1]$; conform lemei 1.5, matricea $E = H^{-1}\, C$ este polinomială; cum

$$H^* = E\ D^*,$$

rezultă că $D^*$ este divizor la dreapta al lui $H^*$, deci $H^*$ este c.m.m.d.c.d. al lui $F^*$ și $G^*$.

*Exemplul* 1.31. Se caută c.m.m.d.c.d. al matricelor

$$F = \begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 + z_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 \\ 0 & z_1 z_2 \end{bmatrix}.$$

Notăm $J = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$.

Deoarece rang $J = 2$, se trece direct la instrucțiunea 2.

2.
$$J(z_1, 0)\ U = \begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 \\ 0 & 0 \\ z_1^2 & z_1 \\ 0 & z_1 z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ z_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de unde

$$J(z_1, z_2)\ U \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & -z_1 z_2 \\ z_2 & -z_1 z_2 \\ z_1 & 0 \\ z_1 z_2 & -z_1^2 z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & -z_1 \\ z_2 & -z_1 \\ z_1 & 0 \\ z_1 z_2 & -z_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = J^*(z_1, z_2)\ E_2(z_2).$$

Obținem factorizarea primitivă la dreapta

$$\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix} A, \text{ cu } \begin{bmatrix} F^* \\ G^* \end{bmatrix} = J^* \text{ și } A = E_2(z_2)\ U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Se determină matricea $S$, care aduce pe $J^*$ la forma

$$S\, J^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -z_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & -z_1 \\ z_2 & -z_1 \\ z_1 & 0 \\ z_1 z_2 & -z_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & -z_1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $H$ este primitivă, $H = H^*$ și c.m.m.d.c.d. este

$$D = H\,A = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & -z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Într-adevăr

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \overline{F}D \text{ și } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1^2 & z_1 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \widetilde{G}\,D.$$

Utilitatea algoritmului 1.1 este relevată în rezolvarea problemei factorizării matricelor raționale.

**Propoziția 1.29.** Fie $A \in M_{n\times m}(K(z_1, z_2))$. Atunci există matricele $F \in M_{n\times m}(K[z_1, z_2])$ și $G \in M_n(K[z_1, z_2])$, $G$ nesingulară, astfel încît

$$A(z_1, z_2) = F(z_1, z_2)\, G^{-1}(z_1, z_2). \tag{1.34}$$

*Demonstrație.* Fie $g_i(z_1, z_2)$ cel mai mare numitor comun al fracțiilor raționale din coloana $i$ a matricei $A$. Atunci matrice $F = A\{\text{diag } g_i\}$ este polinomială și relația (1.34) are loc cu $G = \{\text{diag } g_i\}$.

Analog se poate obține o factorizare de forma

$$A(z_1, z_2) = \widetilde{G}^{-1}(z_1, z_2)\, \widetilde{F}(z_1, z_2). \tag{1.35}$$

*Definiția 1.28.* Egalitatea (1.34) se numește *factorizare primă la dreapta* a matricei $A$, dacă $F$ și $G$ sînt matrice relativ prime la dreapta. Analog, (1.35) se numește *factorizare primă la stînga* dacă $\widetilde{F}$ și $\widetilde{G}$ sînt relativ prime la stînga.

Dacă $A$ este o matrice de transfer (deci proprie) aceste factorizări se numesc *ireductible* și sînt utilizate în obținerea reprezentărilor de stare minimale în teoria sistemelor 2D.

**Propoziția 1.30.** Dacă $A$ este matrice 2D rațională, atunci există o factorizare primă la dreapta (la stînga).

*Demonstrație.* Fie $D$ c.m.m.d.c.d. al matricelor $F$ și $G$ (obținut cu algoritmul 1.1), deci $F = \overline{F}D$, $G = \overline{G}\,D$. $G$ fiind nesingulară, la fel vor fi $\overline{G}$ și $D$ și din (1.34)

$$A(z_1, z_2) = \overline{F}\,D\,D^{-1}\,\overline{G}^{-1} = \overline{F}\,\overline{G}^{-1}.$$

În același mod, din (1.35) se poate obține o factorizare primă la stînga.

*Exemplul* 1.32. Considerăm matricea de transfer

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{z} \\ 1 & \frac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

Se observă că o factorizare a ei este $Z = F\,G^{-1}$ cu $F$ și $G$ din exemplul 1.31.

După determinarea c.m.m.d.c.d. $D$, factorizarea ireductibilă devine

$$Z = \bar{F}\,\bar{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

În cele ce urmează, vor fi discutate proprietățile factorizărilor cu matrice $F$ și $G$ relativ prime, utilizînd rezultatele din [2].

**Teorema 1.18.** Matricele $F(z_1, z_2)$ și $G(z_1, z_2)$ sînt relativ prime la dreapta peste $K[z_1, z_2]$ dacă și numai dacă sînt relativ prime la dreapta peste $K(z_1)[z_2]$ și $K(z_2)[z_1]$.

*Demonstrație.* Necesitatea. Presupunem că $F$ și $G$ sînt relativ prime la dreapta peste $K[z_1, z_2]$, dar nu sînt relativ prime peste $K(z_1)[z_2]$. Deoarece $K(z_1)$ este corp, $K(z_1)[z_2]$ este inel euclidian și putem aplica duala teoremei 1.7 : există matricea $S$ peste $K(z_2)[z_1]$, cu $|S| \in K(z_2)$, astfel încît

$$S\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

și $H$ este c.m.m.d.c.d. al matricelor $F$ și $G$; $H$ este matrice peste $K(z_2)[z_1]$ cu $\delta_{z_1}(|H|) > 0$. Înmulțind la stînga cu diag $\{s_i(z_2)\}$, unde $s_i(z_2)$ este cel mai mic numitor comun al fracțiilor din linia $i$ a matricei $S$, obținem

$$\tilde{S}\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H} \\ 0 \end{bmatrix},$$

cu $\tilde{S}$, $\tilde{H}$ matrice polinomiale peste $K[z_1, z_2]$ și $\delta_{z_1}(|\tilde{H}|) > 0$. Fie $\tilde{H} = \bar{H}H^*$ o factorizare primitivă la stînga a matricei $\tilde{H}$ în $K[z_2][z_1]$; rezultă că $\delta_{z_1}(|H^*|) = \delta_{z_1}(|\tilde{H}|) > 0$ și conform propoziției 1.28, $H^*$ va fi un divizor comun la dreapta netrivial peste $K[z_1, z_2]$ al matricelor $F$ și $G$, contradicție cu ipoteza.

*Suficiența.* Presupunem că $F$ și $G$ nu sînt relativ prime peste $K[z_1, z_2]$; atunci c.m.m.d.c.d. al lor $U$ este matrice 2D cu $\delta_{z_1}(|U|) > 0$ sau $\delta_{z_2}(|U|) > 0$; în primul caz $U$ va fi divizor comun la dreapta netrivial peste $K(z_2)[z_1]$, în al doilea caz peste $K(z_1)[z_2]$, deci $F$ și $G$ nu sînt 1D relativ prime peste cel puțin unul dintre cele două inele.

**Teorema 1.19** (identitatea lui Bézout). Dacă matricele $F$ și $G$ sînt relativ prime la dreapta peste $K[z_1, z_2]$, atunci există matricele polinomiale 2D $P_d(z_1, z_2)$, $Q_d(z_1, z_2)$ și matricea polinomială 1D $(E_d(z_2)$, cu $|E_d(z_2)| = e_d(z_2) \neq 0$, astfel încît

$$P_d F + Q_d G = E_d. \tag{1.37}$$

*Demonstrație.* Conform teoremei 1.18 $F$ și $G$ sînt relativ prime la dreapta peste $K(z_2)[z_1]$. Aplicînd teorema 1.8 peste inelul euclidian $K(z_2)[z_1]$, rezultă existența matricelor $Q_1$ și $Q_2$ peste acest inel, astfel încît $Q_1 F_1 + Q_2 F_2 = I$. Înmulțind relația la stînga cu $E_d = \{\text{diag } s_i(z_2)\}$ unde $s_i(z_2)$ sînt cei mai mici numitori comuni ai fracțiilor din $K(z_2)$ care sînt coeficienții polinoamelor din linia $i$ a matricelor $Q_1$ și $Q_2$ și notînd $P_d = E_d Q_1$, $Q_d = E_d Q_2$, obținem (1.37).

Analog, pentru matrice $F$ și $G$ relativ prime la dreapta, există matrice polinomiale $P_s(z_1, z_2)$, $Q_s(z_1, z_2)$, $E_s(z_2)$, astfel încît

$$FP_s + GQ_s = E_s. \tag{1.38}$$

De asemenea, putem obține relații (1.37) și (1.38) cu $E_d$ și $E_s$ matrice polinomiale 1D în nedeterminata $z_1$.

**Teorema 1.20** (a fracțiilor matriceale). Dacă matricea de transfer $Z(z_1, z_2)$ are factorizările

$$Z = F_d G_d^{-1} = G_s^{-1} F_s, \tag{1.39}$$

cu $F_d$, $G_d$ relativ prime la dreapta, $F_s$ și $G_s$ relativ prime la stînga, atunci există $c \in K$, astfel încît

$$|G_d| = c\,|G_s|.$$

*Demonstrație.* Conform teoremei 1.19 au loc relațiile

$$P_d F_d + Q_d G_d = E_d, \quad F_s P_s + G_s Q_s = E_s,$$

iar din (1.39)

$$F_s G_d - G_s F_d = 0;$$

atunci, notînd

$$U = \begin{bmatrix} Q_d & P_d \\ F_s & -G_s \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} G_d & P_s \\ F_d & -Q_s \end{bmatrix}, \quad W = Q_d P_s - P_d Q_s,$$

obținem

$$UV = \begin{bmatrix} E_d & W \\ 0 & E_s \end{bmatrix}.$$

Rezultă $|U|\,|V| = |E_d(z_2)|\,|E_s(z_2)|$, deci $|U|$ și $|V|$ sînt polinoame în $z_2$: $|U| = u(z_2)$, $|V| = v(z_2)$.

Pe de altă parte, modificînd a doua coloană bloc a lui $V$, obținem

$$U\begin{bmatrix} G_d & 0 \\ F_d & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_d & P_d \\ 0 & -G_s \end{bmatrix},$$

de unde $|U|\,|G_d| = -|E_d|\,|G_s|$, deci $u(z_2)\,|G_d| = -e_d(z_2)\,|G_s|$. Analog, schimbînd rolul lui $z_1$ cu $z_2$, obținem o relație $\tilde{u}(z_1)\,|G_d| = -\tilde{e}_d(z_1)\,|G_s|$, de unde

$$\frac{|G_d|}{|G_s|} = -\frac{e_d(z_2)}{u(z_2)} = -\frac{\tilde{e}_d(z_1)}{\tilde{u}(z_1)}, \text{ deci } \frac{|G_d|}{|G_s|} = c \in K.$$

**Lema 1.6.** Fie $F$, $G$, $H$ matrice 2D cu $F$ și $G$ relativ prime la dreapta. Atunci matricea $FG^{-1}H$ este polinomială, dacă și numai dacă $G^{-1}H$ este matrice polinomială.

*Demonstrație.* Dacă $G^{-1}H$ este matrice polinomială, atunci evident $FG^{-1}H$ este polinomială. Invers, să presupunem că matricea $L = FG^{-1}H$ este polinomială; deoarece $F$ și $G$ sînt relativ prime, conform teoremei 1.19 are loc relația $P_d F + Q_d G = E_d(z_2)$, pe care o înmulțim la dreapta cu $G^{-1}H$,

$$P_d L + Q_d H = E_d(z_2)\,G^{-1}H.$$



Scanned with OKEN Scanner

Obținem

$$G^{-1}H = E_d(z_2)^{-1}(P_d L + Q_d H),$$

deci $G^{-1} H$ este matrice polinomială în $z_1$; schimbînd rolul lui $z_1$ cu $z_2$, va rezulta $G^{-1}H$ polinomială și în $z_2$.

**Lema 1.7.** Dacă matricele de transfer $F_d G_d^{-1} = G_s^{-1} F_s$ și $G_d^{-1} H$ sînt ireductibile, atunci matricele $G_s$ și $F_s H$ sînt relativ prime la stînga.

*Demonstrație.* Presupunem că $G_s$ și $F_s H$ nu sînt relativ prime, deci ca în propoziția 4.6 putem reduce factorizarea

$$G_s^{-1}(F_s H) = G^{-1} F,$$

cu un c.m.m.d.c.s. $D$ cu proprietatea $\delta_{z_1}(|D|) > 0$ sau $\delta_{z_2}(|D|) > 0$; astfel încît $G$ și $F$ sînt relativ prime la stînga; din $G_s = DG$ rezultă $\delta_{z_1}(|G_s|) > \delta_{z_1}(|G|)$ sau $\delta_{z_2}(|G_s|) > \delta_{z_2}(|G|)$. Factorizăm $G^{-1} F$ sub forma $G^{-1} F = \widetilde{F}\, \widetilde{G}^{-1}$, cu $\widetilde{F}$ și $\widetilde{G}$ relativ prime la dreapta; conform teoremei 1.10 $|G| = c_1 |\widetilde{G}|$ și $|G_d| = c_2 |G_s|$ cu $c_1, c_2 \in K$, deci și $|\widetilde{G}|$ are gradul în $z_1$ sau în $z_2$ strict mai mic decît cel al lui $|G_d|$.

Pe de altă parte,

$$F_d G_d^{-1} = G_s^{-1} F_s H = G^{-1} F = \widetilde{F}\, \widetilde{G}^{-1}$$

implică

$$F_d G_d^{-1} H \widetilde{G} = \widetilde{F}$$

și, conform lemei 1.6, matricea $L = G^{-1} H \widetilde{G}$ este polinomială. Obținem factorizarea

$$G_d^{-1} H = L \widetilde{G}^{-1},$$

care contrazice ireductibilitatea lui $G_d^{-1} H$.

**Teorema 1.21.** Fie $F$, $G$, $H$, $N$, $D$ matrice polinomiale 2D. Dacă

$$FG^{-1} H = N D^{-1}$$

și $G$, $H$ sînt relativ prime la stînga și $F$, $G$ respectiv $N$, $D$ sînt relativ prime la dreapta, atunci

$$|G| = c|D|, \text{ cu } c \in K.$$

*Demonstrație.* Considerăm o factorizare ireductibilă la stînga $\widetilde{G}^{-1} \widetilde{F}$ a matricei raționale $FG^{-1}$; conform teoremei 1.20 $|G| = c_1 |\widetilde{G}|$, cu $c_1 \in K$. Deoarece $FG^{-1} = \widetilde{G}^{-1}\widetilde{F}$ sînt ireductibile și $G^{-1} H$ este ireductibilă, din lema 1.7 rezultă că $\widetilde{G}$ și $\widetilde{F} H$ sînt relativ prime. Din factorizările ireductibile

$$\widetilde{G}^{-1} \widetilde{F} H = F G^{-1} H = N D^{-1},$$

obținem $|\widetilde{G}| = c_2 |D|$ cu $c \in K$, deci $|G| = c_1 c_2 |D|$.

# 2. SISTEME 2D. NOŢIUNI DE BAZĂ

## 2.1. Reprezentările algebrice ale secvenţelor 2D

În acest capitol sînt definite secvenţele 2D şi posibilitatea reprezentării lor prin polinoame 2D.

Se consideră $F_I(x, y)$ un cîmp-imagine, ideal, de dimensiune infinită. Semnificaţia fizică a lui $F_I(x, y)$ poate fi intensitatea (strălucirea), densitatea fotografică sau oricare alt indice de calitate, care caracterizează un punct curent al imaginii fizice, punct de coordonate $(x, y)$.

Eşantionarea imaginii, presupunînd o eşantionare ideală, din punct de vedere matematic înseamnă înmulţirea funcţiei continue $F_I(x, y)$ cu o funcţie de eşantionare spaţială, de forma unei reţele de impulsuri Dirac decalate spaţial, ca în figura 2.1.

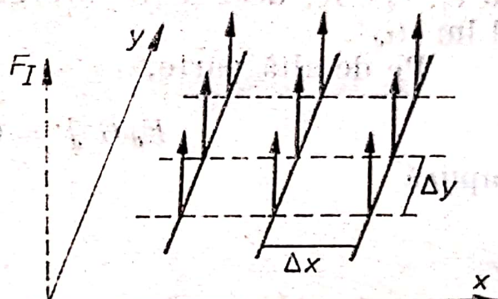


Fig. 2.1.

O astfel de funcţie poate fi reprezentată prin

$$E(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x,\ y - j\Delta x).$$

Imaginea eşantionată este caracterizată atunci de

$$F_E = F_I(x, y)\, E(x, y) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_I(i\Delta x, j\Delta y)\, \delta(x - i\Delta x,\ y - j\Delta y).$$

Funcţia $F_E$ admite o transformare Fourier, care dă spectrul de frecvenţe $\mathcal{F}_E(\omega_x, \omega_y)$ al imaginii eşantionate. Presupunînd acest spectru limitat, în sensul că

$$\mathcal{F}_E(\omega_x, \omega_y) = 0, \text{ pentru } |\omega_x| > \omega_{xb};\ |\omega_y| > \omega_{yb},$$

presupunere valabilă în cazurile practice, şi notînd pulsaţiile de eşantionare

$$\omega_{xe} = \frac{2}{\Delta x}; \quad \omega_{ye} = \frac{2}{\Delta y},$$

reconstrucţia imaginii iniţiale $F_I$ se poate face pe baza lui $F_E$, numai dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$\omega_{xb} \leqslant \frac{\omega_{xe}}{2}; \quad \omega_{yb} \leqslant \frac{\omega_{ye}}{2},$$

respectiv

$$\Delta x \leqslant \frac{\pi}{\omega_{xb}}; \quad \Delta y \leqslant \frac{\pi}{\omega_{yb}}.$$

Condiţiile de mai sus sînt echivalentul 2D al condiţiei formulate de teorema lui Shannon, privind eşantionarea sistemelor 1D.

În cele ce urmează, vom presupune imaginea $F_I$ de dimensiuni finite $N_{1/x} \times N_{2/y}$. Rezultă că în urma eşantionării, pe baza acestei imagini se obţine „o suprafaţă de date", $F_E(i, j)$, $i = 0, 1, \ldots, N_1$, $j = 0, \ldots, N_2$.

Această suprafaţă de date poate fi reprezentată ca o matrice: $F = [F_E(i, j)]$ sau ca un vector [f].

Transcrierea matricei $F$ ca un vector se poate face, dacă se procedează în felul următor.

Fie $\mathbf{V}_n$ un vector operaţional, de dimensiune $N_2 \times 1$, şi $E_n$ o matrice de dimensiuni $N_1 N_2 \times N_1$, definiţi astfel:

$$\mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ n-1 \\ n \\ \\ \\ N_2 \end{matrix} \qquad E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_{N_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ n-1 \\ n \\ \\ \\ N_2 \end{matrix},$$

Atunci,

$[\mathbf{f}] = \sum_{n=1}^{N_2} E_n F \mathbf{V}_n$ este un vector, obţinut prin baleierea coloanelor matricei $F$ ($\mathbf{V}_n$ extrage coloana $n$ din $F$, iar $E_n$ plasează această coloană pe poziţia $n$ în elementele vectorului f).

În general, prelucrarea imaginii eşantionate $F_E$ presupune o operaţie, în cele mai dese cazuri, liniară, asupra „suprafeţei de date". În urma acestei operaţii se obţine o altă suprafaţă de date $P(m_1, m_2)$ de dimensiuni $M_{1/x} \times M_{2/y}$, în care

$$P(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} F_E(i, j) \, \mathrm{Op}\,(i, j, m_1, m_2).$$

Operatorul Op este de regulă o funcţie atît de coordonatele imaginii de intrare, cît şi de coordonatele imaginii de ieşire. Folosind interpretarea vectorială a imaginii eşantionate, operaţia liniară poate fi evidenţiată sub forma

$$\mathbf{P} = TF,$$

în care $\mathbf{P}$ este vectorul care reprezintă imaginea de ieşire, iar $T$ este o matrice care realizează transformarea liniară. În cazul în care $N_1 = N_2 = N$, $M_1 = M_2 = M$, atunci $\mathbf{P}$, $f$ şi $T$ sînt de dimensiuni $M \times 1$, $N^2 \times 1$; $M^2 \times N^2$ respectiv. Se poate conchide că elementele caracteristice ale imaginii de ieşire $\mathbf{P}$ ($P(m_1, m_2)$), sînt dependente pe de o parte de calităţile imaginii de intrare $F_E(i, j)$, iar pe de altă parte de proprietăţile operatorului Op (respectiv ale matricei de tranziţie $T$).

Folosind o reprezentare cunoscută din cazul sistemelor 1D, în situația de față,

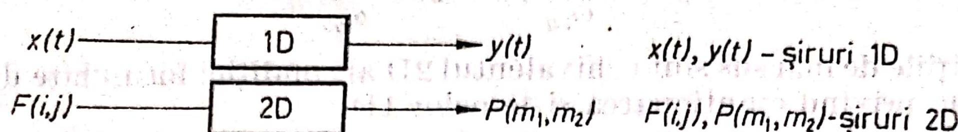



Fig. 2.2.

Ajungem astfel la necesitatea studierii proprietăților unor sisteme noi, care sînt sistemele bidimensionale (2D).

Vom defini un sistem bidimensional (2D), în forma sa cea mai generală, ca transformarea unei mulțimi de funcții 2D, $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_N(x, y)$, considerate ca intrări într-o altă mulțime de funcții 2D, $G_1(x, y), G_2(x, y), \ldots, \ldots, G_M(x, y)$, considerate ca ieșiri, transformarea fiind caracterizată de un operator Op, respectiv de o matrice de tranziție.

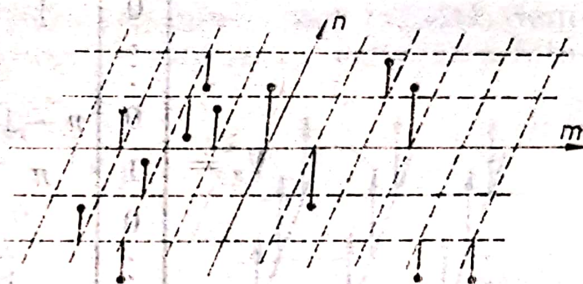



Fig. 2.3.

Fie o funcție oarecrare $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ (avînd ca argumente variabilele discrete $m$, $n$); vom nota, pentru ușurință, $u(m, n)$. O posibilă interpretare a funcției $u(m, n)$ este dată în figura 2.3.

Pot fi considerate și funcții $u : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$.

Notăm valoarea lui $u(m, n)$ în punctul de coordonate $m$, $n$ prin $u_{m,n}$. Mulțimea valorilor $\{u_{m,n}\}$ poartă numele de *suprafață* 2D sau *secvență* (*șir*) 2D.

Secvențele (șirurile) 2D pot fi clasificate în următoarele categorii:

a) infinite $\{u_{m,n}\} \neq 0$, pentru $\begin{cases} m = -\infty, \ldots, +\infty, \\ n = -\infty, \ldots, +\infty; \end{cases}$

b) semifinite pe $m$ $\{u_{m,n}\} \neq 0$, pentru $\begin{cases} m = 0, \ldots, +(-)\infty, \\ n = -\infty, \ldots, +\infty; \end{cases}$

c) semifinite pe $n$ $\{u_{m,n}\} \neq 0$, pentru $\begin{cases} m = -\infty, \ldots, +\infty, \\ n = 0, \ldots, +(-)\infty; \end{cases}$

d) semifinite pe $m,n$ $\{u_{m,n}\} \neq 0$, pentru $\begin{cases} m = 0, \ldots, +(-)\infty, \\ n = 0, \ldots, +(-)\infty; \end{cases}$

e) finite $\{u_{m,n}\} \neq 0$, pentru $\begin{cases} m = 0, \ldots, M, \\ n = 0, \ldots, N; \end{cases}$

M, N sînt întregi, pozitivi sau negativi.

Vom spune că secvența are dimensiunea $(M+1, N+1)$.

Ținînd seama de interpretarea dată în figura 2.3, pentru o secvență oarecare 2D, vom nota:

a) $S(\text{I}, \ldots, \text{IV})$ secvență infinită (deoarece se întinde pe toate cele patru cadrane ale planului $m-n$);

b) $\begin{cases} S(\text{I}, \text{IV}) \text{ secvență semifinită pe } m, \text{ pentru } m = 0, \ldots, +\infty, \\ S(\text{II}, \text{III}) \text{ secvență semifinită pe } n, \text{ pentru } m = 0, \ldots, -\infty; \end{cases}$

c) $\begin{cases} S(\mathrm{I, II}) \text{ secvență semifinită pe } n, \text{ pentru } n = 0, \ldots, +\infty, \\ S(\mathrm{III, IV}) \text{ sevență semifinită pe } n, \text{ pentru } n = 0, \ldots, -\infty; \end{cases}$

d) $\begin{cases} S(\mathrm{I, I}) \text{ secvență semifinită pe } m, n, \text{ pentru } \begin{cases} m = 0, \ldots, +\infty, \\ n = 0, \ldots, +\infty, \end{cases} \\ S(\mathrm{IV, IV}) \text{ secvență semifinită pe } m, n, \text{ pentru } \begin{cases} m = 0, \ldots, +\infty, \\ n = 0, \ldots, -\infty, \end{cases} \\ S(\mathrm{III, III}) \text{ secvență semifinită pe } m, n, \text{ pentru } \begin{cases} m = 0, \ldots, -\infty, \\ n = 0, \ldots, -\infty, \end{cases} \\ S(\mathrm{II, II}) \text{ secvență semifinită pe } m, n, \text{ pentru } \begin{cases} m = 0, \ldots, -\infty, \\ n = 0, \ldots, +\infty. \end{cases} \end{cases}$

Secvențele finite sînt cazuri particulare ale secvențelor semifinite pe $m$, $n$ și le vom nota $S_f(I, I)$ etc.

Se observă că orice semnal spațial (imaginile, fotografiile etc.) poate fi transformat într-o secvență 2D finită.

Nu vom insista asupra posibilităților și modalităților de transformare a unei imagini într-o secvență 2D, pentru că aceasta ar însemna să abordăm teoria codificării imaginilor, ceea ce nu constituie obiectul lucrării de față. În continuare, vom considera că avem la dispoziție o secvență (o suprafață) 2D și ne punem problema atît a modului de utilizare cît și a tehnicilor necesare prelucrării acestei secvențe.

### 2.1.1. Transformate $z$ 2D

Din teoria sistemelor monodimensionale (1D) se știe că prin utilizarea unor transformări matematice adecvate este posibilă facilitarea analizei unor semnale analogice; o astfel de transformare este transformarea Laplace. La fel de cunoscut este și faptul că analiza sistemelor 1D discrete este mult ușurată prin utilizarea transformatelor $z$, care convertesc (transformă) semnalul discret într-o reprezentare algebrică în domeniul $z$. Pornind de la acest fapt, s-a căutat o reprezentare algebrică și pentru secvențele 2D, ajungîndu-se astfel la definirea transformatelor $z$ 2D.

În literatura de specialitate se utilizează două tipuri de transformări $z$ 2D:

— transformarea $z$ standard;

— transformarea $z$ nestandard.

### 2.1.2. Transformata $z$ 2D standard

Transformarea $z$ standard provine din extinderea transformării $z$ monodimensionale.

*Definiția 2.1.* Fie un șir 2D infinit $\{u_{m,n}\}$. Se numește transformata $z$ 2D, $U^*(z_1, z_2)$, a șirului de valori discrete $\{u_{m,n}\}$ funcția

$$\mathcal{Z}\{u_{m,n}\} = U^*(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n}, \tag{2.1}$$

unde $z_1$ și $z_2$ sînt variabile complexe.



Scanned with OKEN Scanner

**Propoziția 2.1.** Dacă șirul $\{u_{m,n}\}$ satisface următoarele proprietăți :

a) $u_{m,n} = 0$, pentru orice $m$ și (sau) $n$ numere întregi negative ;

b) $|u_{m,n}| < K R_1^m R_2^n$, pentru orice $n > \hat{N}$, și $m > \hat{M}$, unde $R_1$, $R_2$, $\hat{N}$, $\hat{M}$, $K$ sînt constante, $R_1, R_2, K \in \mathbb{R}^+$, $\hat{N}, \hat{M} \in \mathbb{N}$, atunci seria $\mathcal{Z}\{u_{m,n}\}$ este absolut convergentă pe domeniul de convergență

$$D = \{(z_1, z_2) : |z_1| > R_1 \text{ și } |z_2| > R_2\}. \tag{2.2}$$

Demonstrația propoziției 2.1 rezultă imediat, considerînd sumarea din (2.1) pe domenii $m < \hat{M}$, $n < \hat{N}$, $m > \hat{M}$, $n > \hat{N}$; $m < \hat{M}$, $n > \hat{N}$; $m > \hat{M}$, $n < \hat{N}$. Există mai multe posibilități de însumare a seriei (2.1), care este dublu infinită. Mai mult, orice altă reordonare a unei serii absolut convergente conduce tot la o serie absolut convergentă, iar suma este aceeași.

Multe dintre proprietățile transformatei $z$ monodimensionale se regăsesc în transformata $z$ 2D standard. Vom enunța cîteva dintre acestea :

a) Liniaritatea :

$$\mathcal{Z}\{au_{m,n} + by_{m,n}\} = a\mathcal{Z}\{u_{m,n}\} + b\mathcal{Z}\{y_{m,n}\},$$

unde $u_{m,n}$, $y_{m,n}$ sînt șiruri 2D, iar $a$, $b$ constante.

b) Deplasarea șirului :

$$\mathcal{Z}\{u_{m+M,n+N}\} = z_1^M z_2^N \mathcal{Z}\{u_{m,n}\} - \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} u_{j,k}\, z_1^{M-j} z_2^{N-k} -$$

$$- \sum_{j=M}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1} u_{j,k}\, z_1^{M-j} z_2^{N-k} - \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=N}^{\infty} u_{j,k}\, z_1^{M-j} z_2^{N-k},$$

unde $u_{j,k} = 0$, pentru $j < 0$ sau $k < 0$,

$$\mathcal{Z}\{u_{m-M,n-N}\} = z_1^{-M} z_2^{-N} \mathcal{Z}\{u_{m,n}\}.$$

c) Convoluția șirurilor :

Fie șirurile

$$\{w_{m,n}\} \leftrightarrow W^*(z_1, z_2),$$

$$\{g_{j,k}\} \leftrightarrow G^*(z_1, z_2),$$

$$\{u_{m,n}\} \leftrightarrow U^*(z_1, z_2).$$

Dacă :

$$W^*(z_1, z_2) = G^*(z_1, z_2)\, U^*(z_1, z_2),$$

atunci :

$$w_{m,n} = \sum_{-\infty}^{m}\sum_{-\infty}^{n} g_{j,k}\, u_{m-j,n-k} = \sum_{-\infty}^{m}\sum_{-\infty}^{n} g_{m-j,n-k}\, u_{j,k}. \tag{2.3}$$

d) Formule de inversiune :

Dîndu-se $\mathcal{Z}\{u_{m,n}\}$, transformata $z$ 2D a unui șir oarecare, atunci

$$u_{j,k} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} U^*(z_1, z_2)\, z_1^{j-1} z_2^{k-1}\, dz_1\, dz_2, \tag{2.4}$$

unde contururile de integrare $C_1$, $C_2$ se află în interiorul regiunii de convergență a șirului 2D. Dacă seria este absolut convergentă, atunci se poate considera că

$C_1$ este conturul definit de $R_1^* > R_1$; $R_1^* = |z_1|$,

$C_2$ este conturul definit de $R_2^* > R_2$; $R_2^* = |z_2|$.

c) Dacă șirul $\{u_{m,n}\}$ este absolut sumabil, el poate fi reprezentat printr-o transformată Fourier directă,

$$U(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_m \sum_n u_{m,n}\, e^{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)}, \tag{2.5}$$

și printr-o transformată Fourier inversă,

$$u_{m,n} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\, e^{j(\omega_1 m + \omega_2 n)}\, d\omega_1\, d\omega_2, \tag{2.6}$$

considerînd $z_1 = e^{T_1 s_1}$, $z_2 = e^{T_2 s_2}$, $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$.

Se observă faptul că $U(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$, care dă spectrul de frecvențe ale lui $U(z_1, z_2)$, este dublu periodică atît în $\omega_1$, cît și în $\omega_2$, cu perioada $2\pi$ în fiecare variabilă.

### 2.1.3. Transformata z 2D nestandard

*Definiția 2.2.* Fie un șir 2D $\{u_{m,n}\}$; se numește transformata $z$ 2D nestandard — notată $U^*(z_1, z_2)$ — suma dublă

$$U^{**}(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} u_{m,n}\, z_1^m z_2^n. \tag{2.7}$$

O astfel de transformare poate fi justificată astfel în modul următor: Fie un șir 2D, $\{u_{m,n}\}$, provenit din codificarea unei suprafețe de întindere finită, care poate fi reprezentat printr-o matrice de date,

$$u_{m,n} = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,M} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{N,1} & u_{N,2} & \cdots & u_{N,M} \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

în care $m = 0, 1, \ldots, N$ și $n = 0, 1, \ldots, M$. Matricea de date a fost construită pornindu-se de la o reprezentare asemănătoare cu cea din figura 2.3, prin baleierea linie cu linie a întregii suprafețe.

Pentru prelucrarea pe calculator, datele conținute în (2.8) trebuie înregistrate pe un suport. Înregistrarea presupune o succesiune a valorilor într-o anumită ordine, care să reflecte poziția lor în suprafața inițială. Plecînd de la modul în care se baleiază o imagine de televiziune, acest deziderat a fost atins ponderîndu-se fiecare valoare din (2.8) cu două variabile: o variabilă indică linia baleiată, cealaltă variabilă indică coloana baleiată, iar prin puterile lor — cele două variabile indică poziția unui element de pe o anumită linie sau coloană. Astfel, valoarea $u_{2,1}$ va fi ponderată: $u_{2,1}\; z_1^2 z_2^1$, unde $z_1^2$ reprezintă faptul că elementul $u_{2,1}$ se află pe linia a treia, iar $z_2^1$ faptul că același element se află și

în coloana a doua. De aici s-a ajuns la definirea transformatei $U^{**}$, în care ordinea de însumare reprezintă modul în care este baleiată suprafaţa de date (de exemplu de la stînga la dreapta şi de sus în jos etc.). Evident că din punct de vedere matematic ordinea de însumare poate fi schimbată (rezultînd un alt mod de baleiere a imaginii). Legătura cu transformata $z$ 1D a fost făcută definindu-se $z_1$, $z_2$ ca două variabile complexe de forma : $z_1 = e^{-T_1 s_1}$, $z_2 = e^{-T_2 s_2}$ (spre deosebire de transformata $z$ 2D standard, în care $z_1 = e^{T_1 s_1}$, $z_2 = e^{T_2 s_2}$, $s_1$, $s_2$ fiind variabile complexe continue, date de transformări de tipul Laplace).

## 2.2. Sisteme liniare 2D

În continuare vor fi prezentate conceptele de bază în ceea ce priveşte definirea sistemelor 2D cauzale, reprezentările lor polinomiale, conexiunile şi implicaţiile dintre forma funcţiei de transfer şi comportarea intrare-ieşire a sistemului.

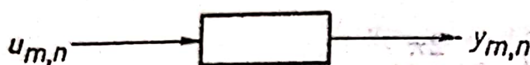



Fig. 2.4.

Fie un şir 2D : $u = \{u_{m,n}\}$ şi un sistem care admite ca intrare şirul $u$, oferind la ieşire şirul : $y = \{y_{m,n}\}$ (fig. 2.4).

*Definiţia 2.3.* Se numeşte sistem 2D un sistem care admite la intrare un şir 2D, furnizînd la ieşire tot un şir 2D, transferul intrare-ieşire fiind caracterizat printr-un operator $T[\cdot]$.

*Definiţia 2.4.* Sistemul 2D este ***liniar***, dacă pentru două şiruri de intrare arbitrare $\{u_{1,m,n}\}$ şi $\{u_{2,m,n}\}$ şi două constante complexe arbitrare $c_1$ şi $c_2$ este îndeplinită relaţia

$$T[c_1\{u_{1,m,n}\} + c_2\{u_{2,m,n}\}] = c_1 T[\{u_{1,m,n}\}] + c_2 T[\{u_{2,m,n}\}]. \quad (2.9)$$

*Definiţia 2.5.* Un sistem 2D este ***invariant*** dacă

$$\{y_{m-m_0,\, n-n_0}\} = T[\{u_{m-m_0,\, n-n_0}\}], \quad (2.10)$$

pentru orice şir de intrare $u$ şi orice $m_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Un sistem care îndeplineşte condiţiile definiţiilor 2.3, 2.4, şi 2.5 va fi denumit ***sistem liniar invariant*** 2D. Se observă că liniaritatea şi invarianţa sînt proprietăţi independente, în sensul că nici una nu o implică pe cealaltă.

*Definiţia 2.6.* Se numeşte impuls Dirac 2D, şirul 2D,

$$\{\delta_{m,n}\} = \begin{cases} 1 & m = n = 0\,, \\ 0 & m \neq 0\,;\ n \neq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Din relaţia (2.1) rezultă

$$T[\{\delta_{m,n}\}] = \{h_{m,n}\}, \quad (2.12)$$

unde $h_{m,n}$ este răspunsul sistemului 2D la intrarea impuls.

Vom denumi funcţia $\{h_{m,n}\}$ şirul pondere al sistemului.

Analog cu sistemul 1D, sistemele linare invariante 2D pot fi caracterizate prin convoluția

$$y_{m,n} = \sum_{0}^{m} \sum_{0}^{n} u_{k,e}\, h_{m-k,n-e}, \tag{2.13}$$

unde $u_{k,e}$ reprezintă șirul de intrare, iar $h_{m-k,n-e}$ reprezintă (funcția) șirul pondere, definit de (2.12).

Aplicînd transformarea $z$ 2D relației (2.13), se obține

$$Y(z_1, z_2) = U(z_1, z_2)\, H(z_1, z_2), \tag{2.14}$$

unde $Y(z_1, z_2)$ și $U(z_1, z_2)$ sînt transformatele $z$ 2D ale șirului de intrare și, respectiv, de ieșire, iar $H(z_1, z_2)$ este transformata $z$ 2D a șirului pondere.

*Definiția 2.7.* ***Funcția de transfer*** a unui sistem 2D este

$$H(z_1, z_2) = \frac{Y(z_1, z_2)}{U(z_1, z_2)} = \mathcal{Z}[\{h_{m,n}\}]. \tag{2.15}$$

***Observația*** 2.1. Atît relația (2.14), cît și relația (2.15) sînt adevărate indiferent de tipul transformatei $z$ 2D utilizate. De exemplu, dacă se utilizează transformata $z$ standard, atunci

$$H^*(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} h_{m,n}\, z_1^{-m} z_2^{-n}. \tag{2.16}$$

*Definiția 2.8.* Se numește sistem 2D un sistem a cărui funcție de transfer este de forma

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)}, \tag{2.17}$$

unde $A(z_1, z_2)$ și $B(z_1, z_2)$ sînt transformatele $z$ 2D ale unor șiruri 2D de tipul $S_f(I, I)$. Cauzalitatea este asigurată dacă

$$\delta_{z_1} A \leqslant \delta_{z_1} B,$$

$$\delta_{z_2} A \leqslant \delta_{z_2} B.$$

Astfel, dacă $\{a_{m,n}\}$ și $\{b_{m,n}\}$ sînt două șiruri de tipul $S_f(I, I)$ și li se aplică transformarea $z$ 2D standard, atunci se va obține

$$H = H^*(z_1, z_2) = \frac{\sum_{0}^{M_a} \sum_{0}^{N_a} a_{m,n}\, z_1^{-m} z_2^{-n}}{\sum_{0}^{M_b} \sum_{0}^{N_b} b_{m,n}\, z_1^{-m} z_2^{-n}}. \tag{2.18}$$

Dacă șirurilor $\{a_{m,n}\}$ și $\{b_{m,n}\}$ li se aplică transformarea $z$ 2D nestandard, atunci se va obține

$$H = H^{**}(z_1, z_2) = \frac{\sum_{0}^{M_a} \sum_{0}^{N_a} a_{m,n} z_1^m z_2^n}{\sum_{0}^{M_b} \sum_{0}^{N_b} b_{m,n} z_1^m z_2^n}. \tag{2.19}$$

*Observația* 2.2. Fie $\{a_{m,n}\}$ și $\{b_{m,n}\}$ șirurile de intrare și, respectiv, de ieșire, care caracterizează un sistem 2D cauzal, avînd o funcție de transfer de forma (2.18). Din (2.18) rezultă

$$Y^*(z_1, z_2) = H^*(z_1, z_2)\, U^*(z_1, z_2). \tag{2.20}$$

Ținînd seama de (2.18), relația (2.20) devine

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{0}^{M_b} \sum_{0}^{N_b} b_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n}\right) Y^*(z_1, z_2) = \\ &= \left(\sum_{0}^{M_a} \sum_{0}^{N_a} a_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n}\right) U^*(z_1, z_2). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Presupunem $b_{0,0} \neq 0$ și notăm

$$b^1_{m,n} = b_{m,n}/b_{0,0},$$

$$a^1_{m,n} = a_{m,n}/b_{0,0}.$$

Ecuația de mai sus devine (după împărțirea cu $b_{0,0}$)

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{\substack{k=0 \\ k+l\neq 0}}^{M_b} \sum_{l=0}^{N_a} b^1_{m,n} z_1^{-k} z_2^{-l}\right) Y^*(z_1, z_2) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{M_a} \sum_{j=0}^{N_a} z_1^{-i} z_2^{-j} a^1_{m,n}\right) U^*(z_1, z_2) \end{aligned} \tag{2.22}$$

sau

$$\begin{aligned} Y^*(z_1\ z_2) &= \left(\sum_{i=0}^{M_a} \sum_{j=0}^{N_a} z_1^{-i} z_2^{-j} a^1_{m,n}\right) U^*(z_1, z_2) = \\ &= \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k+l\neq 0}}^{M_b} \sum_{l=0}^{N_b} b_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}\right) Y^*(z_1, z_2). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pe baza lui (2.10), ecuația (2.23) conduce la

$$y_{m,n} = \sum_{i=0}^{M_a} \sum_{j=0}^{N_a} a^1_{i,j} u_{m-i,n-j} - \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=0}}^{M_b} \sum_{l=0}^{N_b} b^1_{k,l} y_{m-k,n-l}. \tag{2.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza ecuaţiei (2.24) se observă că ieşirea sistemului 2D poate fi calculată recurent, pornindu-se de la nişte condiţii iniţiale cunoscute.

În ceea ce priveşte calculul efectiv, el trebuie condus în aşa fel încît valoarea ce urmează a fi calculată pentru $y$ să poată fi dedusă pe baza valorilor calculate anterior.

a) Pentru rezolvarea acestei probleme, definim o funcţie de „ordine",

$$O(m, n) = n + \sum_{\substack{i=0 \\ m,n>0}}^{m+n} i. \tag{2.25}$$

Valorile $y_{k,l}$ se vor calcula din (2.24) prin mărirea indicilor $k$ şi $l$, într-o astfel de ordine încît valorile lui $O(k, l)$ din (2.25) să crească în sensul natural, 0, 1, 2, 3, .... Astfel

$$O(m, n) = 0, \text{ pentru } m = 0, n = 0,$$

$$O(m, n) = 1, \text{ pentru } m = 1, n = 0,$$

$$O(m, n) = 2, \text{ pentru } m = 0, n = 1,$$

$$O(m, n) = 3, \text{ pentru } m = 2, n = 0,$$

$$O(m, n) = 4, \text{ pentru } m = 1, n = 1.$$

Rezultă că ordinea de calcul a valorilor $y_{m,n}$ va fi

$$y_{0,0}\,;\ y_{1,0}\,;\ y_{0,1}\,;\ y_{2,0}\,;\ y_{1,1}\,;\ \ldots \text{ etc.}$$

b) Dacă se aplică (2.10) şi (2.21) rezultă

$$\sum_k \sum_l b_{k,l}\, y_{m-k,n-l} = \sum_k \sum_l a_{k,l}\, u_{m-k,n-l}. \tag{2.26}$$

Ecuaţia (2.26) reprezintă o ecuaţie cu diferenţe finite 2D, de aceeaşi natură cu ecuaţia cu diferenţe care indică legătura dintre intrare şi ieşire în cazul sistemelor 1D, în funcţie de parametrii sistemului.

c) Ecuaţiile (2.26) şi (2.24) sînt caracteristice sistemelor cauzale 2D şi sînt aceleaşi, indiferent de tipul transformatei $z$ 2D utilizate.

d) Dacă $H(z_1, z_2) = \dfrac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)}$, din (2.17) rezultă că fracţia poate fi dezvoltată într-o serie de forma

$$H^*(z_1, z_2) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty h_{m,n}\, z_1^{-m}\, z_2^{-n}$$

sau

$$H^{**}(z_1, z_2) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty h_{m,n}\, z_1^{m}\, z_2^{n},$$

în funcţie de tipul transformatei $z$ 2D utilizate ($h_{m,n}$ — funcţia pondere).



Scanned with OKEN Scanner

e) Fie un sistem 2D caracterizat printr-o funcție de transfer $H(z_1, z_2)$, de forma (2.17). Notăm cu $H_c(z_1, z_2)$ funcția de transfer care are coeficienții complex conjugați cu cei ai lui $H(z_1, z_2)$. Se pot defini următoarele simetrii în planul $(\omega_1, \omega_2)$:

1. Simetrie de ordinul 1, dacă

$$H(z_1, z_2)\, H_c(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(z_1^{-1}, z_2^{-1})\, H_c(z_1, z_2).$$

2. Simetrie de ordinul 2, dacă

$$H_c(z_1, z_2) = H(z_1, z_2),$$

$$H(z_1, z_2)\, H(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(z_1^{-1}, z_2)\, H(z_1, z_2^{-1}).$$

3. Simetrie de ordinul 3, dacă

$$H(z_1, z_2) = H^*(z_1, z_2)$$

$$H(z_1, z_2)\, H(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(z_2, z_1)\, H(z_2^{-1}, z_1^{-1}).$$

4. Simetrie de ordinul 4, dacă sistemul posedă simultan simetriile de ordinul 3 și 2.

Existența diferitelor tipuri de simetrii este legată de anumite proprietăți ale polinoamelor $A(z_1, z_2)$ și $B(z_1, z_2)$ [5]. Cunoscînd aceste proprietăți se poate impune într-o etapă de proiectare a sistemului satisfacerea uneia sau alteia dintre simetriile definite mai sus, ceea ce are ca efect o reducere considerabilă a volumului de calcul. De exemplu, un sistem de ordinul 3 poate avea 25 coeficienți independenți; dacă are o simetrie de ordinul 2, numărul acestora se poate reduce la 12, iar dacă are o simetrie de ordinul 4, coeficienții independenți pot fi reduși la 10.

## 2.3. Stabilitatea sistemelor 2D

Un aspect important în analiza și sinteza sistemelor 2D îl constituie stabilitatea acestora. Dacă un sistem este instabil, orice intrare — inclusiv zgomotele (perturbațiile) — poate să producă o creștere nelimitată a ieșirii. Extrapolînd rezultatele cunoscute din cazul sistemelor 1D, se poate defini și în cazul sistemelor 2D o stabilitate intrare-ieșire (BIBO) astfel.

Fie un sistem 2D cauzal, cu o singură intrare și o singură ieșire, de forma (2.17)

$$H^{**}(z_1, z_2) = \frac{\sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} a_{k,l}\, z_1^k z_2^l}{\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} b_{i,j}\, z_1^i z_2^j} = \frac{A^{**}(z_1, z_2)}{B^{**}(z_1, z_2)}. \tag{2.27}$$

Presupunem că $b_{0,0} = 1$ și $B^{**}(z_1, z_2) \neq 0$, într-o vecinătate $V_\varepsilon^2$ a originii (0, 0) a planului $z_1, z_2$,

$$V_\varepsilon^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < \varepsilon, |z_2| < \varepsilon\}. \tag{2.28}$$

În aceste condiții $H^{**}(z_1, z_2)$ este analitică în $V_\varepsilon^2$ și admite o dezvoltare în serie, de forma

$$H^{**}(z_1, z_2) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty h_{m,n} z_1^m z_2^n. \tag{2.29}$$

*Definiția 2.9.* Sistemul definit în (2.27) este **BIBO** stabil, dacă și numai dacă șirul $\{h_{m,n}\}$ este absolut sumabil,

$$\sum_m \sum_n |h_{m,n}| < \infty. \tag{2.30}$$

*Observație.* Definiția de mai sus este adevărată, indiferent de tipul transformatei $z$ 2D utilizate, ceea ce se schimbă fiind numai regiunea în care $H(z_1, z_2)$ este analitică. În cazul sistemelor 2D, cu mai multe intrări și ieșiri, definiția 2.9 poate fi reformulată, pornindu-se de la relația (2.13).

*Definiția 2.10.* Fie un sistem 2D, caracterizat de o matrice de transfer $H(z_1, z_2)$ avînd elementele în $\mathbb{R}[z_1, z_2]$.

Sistemul este **BIBO** stabil, dacă pentru oricare $M > 0$, există $N > 0$ astfel încît : $\| U_{k,e} \| \leqslant M$ implică $\| y_{m,n} \| \leqslant N$, oricare ar fi $m$, $n$.

Fie o funcție rațională 2D,

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)}. \tag{2.31}$$

*Definiția 2.11.* Perechea $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ pentru care $A(z_1, z_2) \neq 0$ și $B(z_1, z_2) = 0$ poartă numele de „pol" sau singularitate neesențială de ordinul I (corespund cu polii sistemelor 1D). Perechea $(z_1, z_2)$ pentru care $A(z_1, z_2) = 0$ și $B(z_1, z_2) = 0$ simultan poartă numele de singularitate neesențială de ordinul II (nu au corespondent în cazul sistemelor 1D).

Este clar că dacă $(z_1, z_2)$ este un pol, $H(z_1, z_2) = \infty$. Dacă $(z_1, z_2)$ este o singularitate de ordinul II, $H(z_1, z_2)$ este nedefinită. Una dintre cele mai importante teoreme de stabilitate se datorește lui Shanks.

**Teorema 2.1** (Shanks). Fie un sistem 2D cauzal, caracterizat de o funcție de transfer de tip (2.27). Sistemul este **BIBO** stabil, dacă și numai dacă

$$B^{**}(z_1, z_2) \neq 0, \text{ pentru toți } (z_1, z_2) \text{ din mulțimea } \Gamma^2 = \\ = \{(z_1, z_2) : |z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1\}. \tag{2.32}$$

Asupra acestei teoreme se cuvin a se face următoarele observații :

1. Dacă se utilizează transformata $z$ 2D standard, condiția (2.32) devine :

$$B^{*}(z_1, z_2) \neq 0, \text{ pentru toți } (z_1, z_2) \text{ din mulțimea } \{(z_1, z_2) : |z_1| \geqslant 1 ; |z_2| \geqslant 1\}. \tag{2.33}$$

2. Ținînd seama de definiția 2.11, înainte de aplicarea teoremei trebuie asigurat că $A$ și $B$ sînt polinoame relativ prime (v. cap. 1). Pentru aceasta se poate aplica testul lui Sylvester (v. cap. 1).

3. Teorema lui Shanks, apărută în 1969, a fost considerată și folosită de mulți autori drept o condiție necesară și suficintă pentru stabilitatea **BIBO**. În 1977 Goodman [7] a demonstrat că există situații care se înscriu în condițiile teoremei, dar sistemele sînt instabile și aceasta datorită polilor polinoamelor

de la numărătorul funcțiilor de transfer. Astfel sînt prezentate două funcții de transfer :

$$H_1^{**}(z_1, z_2) = \frac{(1-z_1)^8 (1-z_2)^8}{2 - z_1 - z_2} = \frac{A_1(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)}, \tag{2.34}$$

$$H_2^{**}(z_1, z_2) = \frac{(1 - z_1)(1 - z_2)}{2 - z_1 - z_2} = \frac{A_2(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)}. \tag{2.35}$$

Se observă că polinoamele $A_1$, $B$ și $A_2$, $B$ sînt relativ prime. De asemenea, $B(z_1, z_2) \neq 0$, pe $\{(z_1, z_2) : |z_1| \leqslant 1, \ |z_2| \leqslant 1\}$, exceptînd $z_1 = z_2 = 1$. Atît $H_1^{**}$, cît și $H_2^{**}$ au o singularitate de ordinul II în $z_1 = z_2 = 1$ și totuși se demonstrează că $H_1^{**}$ este BIBO stabilă și $H_2^{**}$ este BIBO instabilă. Rezultă că (2.32) este condiție suficientă de stabilitate BIBO dar nu și condiție necesară.

4. Testarea stabilității prin teorema Shanke este dificilă. O posibilitate ar fi următoarea : se transformă regiunea $d_1$, din planul $z_1$, pentru care $|z_1| \leqslant 1$, în planul $z_2$ prin intermediul ecuației $B(z_1, z_2)=0$. Dacă această transformare nu se suprapune nici măcar parțial peste regiunea $d_2 = \{(z_2, |z_2| \leqslant 1)\}$, atunci sistemul este stabil. Calculul este deosebit de laborios, deoarece pentru fiecare $z_1^0 \in d_1$, trebuie rezolvată o ecuație în $z_2$, de tipul :

$$B^{**}(z_1^0, z_2) = 0, \tag{2.36}$$

ceea ce, în cazul în care $B^{**}$ este un polinom de grad mare în $z_2$, nu este ușor. Pornind de la teoroma Shanks, este util a se distinge între polinoamele $B(z_1, z_2)$, cele care produc instabilitate și cele care conferă stabilitate. Bazat pe această idee, tot Shanks [6] a introdus conceptul de „suprafață de fază minimă".

*Definiția 2.12.* Un polinom finit $S^{**}(z_1, z_2)$ este o *suprafață de fază minimă*, dacă sînt satisfăcute următoarele condiții :

1. Pentru orice $z_1 \in \{|z_1| = 1\}$, ecuația $S^{**}(z_1, z_2) = 0$ nu are nici o rădăcină în $d_2 = \{z_2, |z_2| \leqslant 1\}$.

2. Pentru orice $z_2 \in \{|z_2| = 1\}$, ecuația $S^{**}(z_1, z_2) = 0$ nu are nici o rădăcină în $d_1 = \{z_1, |z_1| \leqslant 1\}$. (Evident conceptul poate fi definit și pentru $S^*(z_1, z_2)$, modificînd corespunzător pe $d_2$, $d_1$.)

**Teorema 2.2.** Un sistem 2D, descris de o funcție de transfer de forma $H^{**}(z_1, z_2)$ (2.17), este BIBO stabil, dacă și numai dacă $B(z_1, z_2)$ este o suprafață de fază minimă.

Definirea conceptului de fază minimă a condus la următorul aspect.

Fie o suprafață oarecare $S_1(m, n)$. Fie, de asemenea, o suprafață $S_2(m, n)$ care minimizează

$$E = \sum_m \sum_n (\delta_{m,n} - S_{12}(m, n))^2, \tag{2.37}$$

în care $\delta_{m,n}$ este funcția impuls 2D (v. (2.11)), iar $S_{12} = S_1(m, n) ** S_2(m, n)$ reprezintă produsul de convoluție dintre $S_1$ și $S_2$. Dimensiunea lui $S_2$ este arbitrară. Dacă $S_1$ are dimensiunea $(M, N)$ și $S_2$ dimensiunea $(P, Q)$, $S_{12}$ va avea dimensiunea $(M + P-1, N+Q-1)$. Deoarece dimensiunea lui $S_2$ este arbitrară, există mai multe suprafețe (secvențe) care îndeplinesc (2.37). Pentru o dimensiune fixată $(P, Q)$ există însă o singură suprafață (secvență) $S_2$ care îndeplinește (2.37).

*Conjectura Shanks.* O suprafață $S_2$ care minimizează (2.37) este o suprafață de fază minimă.

Pe baza acestei conjecturi se poate propune o tehnică de „stabilizare" a unor sisteme instabile.

În [9] însă sînt citate contraexemple, care, bazîndu-se pe anumite proprietăţi ale unor polinoame 2D ortogonale, dezaprobă conjectura Shanks în general. A fost propusă atunci o completare la cele enunţate de Shanks şi anume că $S_2(m, n)$ din (2.37) să aibă aceeaşi dimensiune cu suprafaţa originală $S_1$. Noua formulare a fost testată de Jury şi pînă în prezent nu au fost găsite contra-exemple.

**Teorema 2.3.** Fie $H^{**}(z_1, z_2)$ funcţia de transfer 2D a unui sistem cauzal,

$$H^{**}(z_1, z_2) = \frac{A^{**}(z_1, z_2)}{B^{**}(z_1, z_2)},$$

în care $A^{**}(z_1, z_2)$ şi $B^{**}(z_1, z_2)$ au forma din (2.19).

Sistemul este BIBO stabil, dacă şi numai dacă

1) transformata mulţimii $\bar{d}_1 = (z_1, |z_1| = 1)$ în planul $z_2$, prin intermediul lui $B^{**}(z_1, z_2) = 0$, se situează în afara discului închis $\bar{d}_2 = (z_2, |z_2| \leqslant 1)$;

2) nu există nici un $z_1^0, z_1^0 \in \bar{d}_1$, care prin $B^{**}(z_1, z_2) = 0$ să fie transformat în $z_2 = 0$.

Teorema 2.3, reformulată în cazul în care se lucrează cu transformata $z$ 2D standard ($H^{*}(z_1, z_2)$ de forma (2.18)) demonstrează că $H^{*}(z_1, z_2)$ este stabilă, dacă şi numai dacă transformata cercului unitate $|z_2| = 1$, în planul $z_1$, prin ecuaţia $B^{*}(z_1, z_2) = 0$, nu intersectează regiunea $|z_1| \geqslant 1$ şi, în plus, nici un punct din regiunea $|z_1| \geqslant 1$ nu poate fi transformat în $z_2 = \infty$. Demonstraţia teoremei 2.3 se bazează pe faptul că (2.32) din teoroma Shanks este echivalentă cu următoarele condiţii:

$$1)\ B^{**}(z_1, 0) \neq 0, \text{ pentru } |z_1| \leqslant 1; \tag{2.38}$$

$$2)\ B^{**}(z_1, z_2) \neq 0 \text{ pentru } |z_1| = 1, |z_2| \leqslant 1. \tag{2.39}$$

Din păcate, demonstraţia făcută în [10] este incompletă. Murray [11] dă o demonstraţie completă a acestei teoreme şi reliefează ceea ce este esenţial şi anume că teorema Huang reprezintă într-adevăr condiţiile necesare şi suficiente pentru testarea stabilităţii BIBO. Din punct de vedere practic, algoritmul de testare a stabilităţii după Huang presupune următoarele etape:

a) se transformă cercul unitate $|z_1| = 1$, în planul $z_2$ cu ajutorul ecuaţiei $B^{**}(z_1, z_2) = 0$ şi se observă dacă această transformată cade în afara mulţimii $\bar{d}_2 = (z_2, |z_2| \leqslant 1)$;

b) se rezolvă ecuaţia $B^{**}(z_1, 0) = 0$ şi se observă dacă există rădăcini a căror amplitudine este mai mică decît 1.

O generalizare a teoremei 2.3 de stabilitate este făcută în [12] şi se bazează pe faptul că pentru sisteme 2D cauzale, definite în (2.17), este valabilă o relaţie de tip (2.26).

*Observaţia* 2.3. Un sistem 2D cauzal are o funcţie de transfer de forma

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)},$$

care, în cazul utilizării transformării $z$ 2D nestandard, are forma (2.18).

Referitor la teoria Nyquist de stabilitate, se ştie că din punct de vedere al funcţiilor analitice, conturul 1D Nyquist este de fapt o metodă de a determina

dacă o funcție analitică de o singură variabilă are sau nu zerouri într-o regiune adecvată. Pentru a obține o teorie Nyquist 2D, putem descompune $\Gamma^2$, în care $B(z_1, z_2)$ nu trebuie să aibă zerouri, într-o reuniune de familii de regiuni 1D, cărora li se poate aplica teoria Nyquist clasică. Astfel, pentru $\alpha \in \mathbb{R}, \pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, se poate defini un contur,

$$C_\alpha = \{(e^{i\alpha}, z_2);\ |z_2| \leqslant 1\} \tag{2.40}$$

și un contur:

$$C = \{(z_1, 0);\ |z_1| \leqslant 1\}. \tag{2.41}$$

Conform teoremei 2.3, sistemul este stabil, dacă și numai dacă $B(z_1, z_2)$ nu are zerouri în regiunea $C_\alpha$ și $C$, pentru $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ (v. (2.38) și (2.39)). Pentru fiecare regiune, polinomul $B(z_1, z_2)$ este o funcție analitică 1D, deoarece una dintre variabile este fixată și astfel poate fi aplicat testul Nyquist clasic. Sistemul 2D este stabil dacă și numai dacă conturuile Nyquist ale funcțiilor 1D $B(e^{i\alpha}, z_2)$ $\alpha \in [0, 2\pi)$ și $B(z_1, 0)$ nu sînt egale cu 0 și nu înconjoară originea în planul complex.

În cele ce urmează vom prezenta posbilitatea de testare prin algoritmi finiți a stabilității sistemelor 2D. Am preferat o tratare specială a acestui subiect, din cauza faptului că teoremele de bază ale stabilității BIBO, expuse mai înainte, presupun (cel puțin la prima vedere) algoritmi infiniți de testare, ceea ce evident nu are importanță practică.

Reamintim că stabilitatea sistemelor 2D presupune îndeplinirea condițiilor (2.32), respectiv (2.38) și (2.39).

Se poate demonstra că (2.38) și (2.39) sînt echivalente cu următoarele condiții:

$$\begin{aligned} &\text{a) } B^{**}(a, z_2) \neq 0, \text{ pentru un anumit } a, |a| \leqslant 1, \text{ cînd } |z_2| \leqslant 1;\\ &\text{b) } B^{**}(z_1, b) \neq 0, \text{ pentru anumiți } b, |b| \leqslant 1, \text{ cînd } |z_1| \leqslant 1;\\ &\text{c) } B^{**}(z_1, z_2) \neq 0,\ |z_1| = |z_2| = 1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

În particular, dacă se alege $a = 1 = b$, condițiile (2.42) devin:

$$\begin{aligned} &\text{a) } B^{**}(1, z_2) \neq 0, |z_2| \leqslant 1;\\ &\text{b) } B^{**}(z_1, 1) \neq 0, |z_1| \leqslant 1;\\ &\text{c) } B^{**}(z_1, z_2) \neq 0, |z_1| = |z_2| = 1. \end{aligned} \tag{2.43}$$

### 2.3.1. Testarea stabilității pe baza matricelor simetrice

Se știe că testele de stabilitate pentru cazul 1D continuu sau discret se fac prin utilizarea unor matrice speciale, formate după anumite reguli și avînd drept elemente coeficienții polinomului în studiu. Acestea sînt matrice Hermite, în cazul continuu, și matrice Schur-Cohn, în cazul discret, iar condiția de stabilitate impune ca aceste matrice să fie pozitiv definite. Aplicarea acestor procedee este posibilă și în cazul 2D, pentru testarea condițiilor (2.32), (2.38) și (2.39), dacă se utilizează următorul algoritm.

1) Pornindu-se de la condiția (2.38), se formează polinomul

$$B_1^{**}(z_1, 0) = z^n B^{**}(z^{-1}, 0), \tag{2.44}$$

în care $n$ este gradul în $z_1$ al polinomului 1D. Prin această construcție, domeniul de test devine $\{|z_1| \geqslant 1\}$ și se poate aplica testul Schur-Cohn pentru $B_1^{**}(z_1, 0)$ (matricea Schur-Cohn să fie pozitiv definită).

2) Pentru testarea condiţiei (2.39), se înlocuieşte polinomul $B^{**}(z_1, z_2)$, considerat ca aparţinînd lui $\mathbb{R}[z_1][z_2]$, cu polinomul $B_1^{**}(z_1, z_2)$ construit după modelul (2.44). $B_1^{**}(z_1, z_2)$ se consideră ca aparţinînd tot lui $\mathbb{R}[z_1][z_2]$. Pentru stabilitate este necesar ca matricea Schur-Cohn, construită cu coeficienţii lui $z_2$ din $B_1^{**}(z_1, z_2)$, să fie pozitiv definită. În cazul de faţă elementele matricei Schur-Cohn sînt polinoame în $z_1$ sau (şi) $\bar{z}_1$ (conjugatul lui $z_1$). Minorii acestei matrice sînt, de asemenea, polinoame în $z_1$, $\bar{z}_1$ şi sînt reali deoarece matricea Schur-Cohn este o matrice hermitiană. Pentru ca matricea Schur-Cohn să fie pozitiv definită, este necesar ca numai determinantul matricei să fie pozitiv, plus condiţia ca matricea, pentru un punct de pe cercul unitate, să fie pozitivă. În mod uzual, acest punct poate fi luat $z_1 = 1$.

Testarea pozitivităţii determinantului pentru $|z_1| = 1$ se poate face, dacă se ţine seama că pe $|z_1| = 1 = |e^{i\theta}|$, $\bar{z}_1 = e^{-i\theta} = z_1^{-1}$. Determinantul calculat va avea astfel forma

$$f(z_1, z_1^{-1}) = \sum_{j=0}^{N} a_j (z_1^j + z_1^{-j}). \tag{2.45}$$

Deci (2.45) trebuie să fie pozitivă (sau de semn constant) pentru $|z_1| = 1$. Pentru a stabili aceasta, se formează polinomul

$$g(z_1) = z_1^N f(z_1, z_1^{-1}) > 0, \text{ pentru } |z_1| = 1. \tag{2.46}$$

Satisfacerea lui (2.45) necesită ca $g(1) > 0$, iar $g(z_1)$, de grad $2N$, să nu aibă rădăcini pe cercul unitate.

Pozitivitatea lui (2.46) poate fi testată şi direct pe baza următorului algoritm. S-a demonstrat că $f > 0$, pentru $\forall\, z_1 \in D = \{z_1, |z_1| = 1\}$, dacă şi numai dacă polinomul

$$g(z_1) = z_1^N f(z_1, z_1^{-1}) \tag{2.47}$$

este astfel încît sau $g(z_1) \neq a_0$ nu are zerouri în $D$ şi $\sum_{0}^{N} a_k > 0$, sau $g(z_1) = a_0 > 0$.

Pentru a testa existenţa zerourilor în $D$, se poate utiliza schema recursivă de tipul Marden, care constă în următoarele.

Fie un polinom oarecare,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k, \; a_n \neq 0. \tag{2.48}$$

Lui $g(z)$ îi asociem polinomul

$$g^1(z) = z^N g(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k} \tag{2.49}$$

şi construim şirul de polinoame

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{N-j} a_k^{(j)} z^k,$$

în care

$$g_0(z) = g(z)$$

şi

$$g_{j+1}(z) = a_0^{(j)} g_j(z) - a_{n-j}^{(j)} g_j^1(z), \; j = 0, 1, \ldots, N-1,$$



Scanned with OKEN Scanner

astfel încît

$$a_k^{(j+1)} = a_0^{(j)}\, a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)}\, a_{n-j-k}^{(j)}. \tag{2.50}$$

Vom nota termenul constant $a_0^{(j)}$ al fiecărui polinom $g_j(z)$ cu $d_j$,

$$d_{j+1} = [a_0^{(j)}]^2 - [a_{n-1}^{(j)}]^2 = a_0^{(j+1)}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

şi formăm produsele

$$\Pi_k(g) = d_1,\ d_2, \ldots, d_k, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n.$$

Dacă $V = v(g)$ din produsele $\Pi_k(g)$ sînt negative, iar restul de $\alpha = N - V$ sînt pozitive, atunci $g(z)$ nu are zerouri pe cercul unitate $(D)$, are $V$ zerouri înăuntrul lui $D$ şi $\alpha$ zerouri în afara lui $D$. Condiţiile ca $V(g) = N$ sînt : $g(1) > 0$ ; $\sum_{k=0}^{N} a_k > 0$ ; $(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k > 0$.

**Teorema 2.4.** O matrice hermitiană $H(z)$ este pozitiv definită pe $D = \{z : |z| = 1\}$, dacă şi numai dacă polinomul

$$g(z) = z^N \det H(z) \tag{2.51}$$

satisface

$$v(g) = N\ ;\ \sum_{k=0}^{N} a_k > 0 \text{ şi } H(1) > 0\ [13].$$

Testarea zerourilor unui polinom pe domeniul $D_2 = \{(z_1, z_2),\ |z_1| = 1, |z_2| = 1\}$ se poate face pe baza unui algoritm propus de N. K. Bose.

Fie $B^{**}(z_1, z_2)$ un polinom 2D, $z_1$, $z_2$, variabile complexe. Considerăm că $B^{**}(z_1, z_2)$ aparţine lui $F\ [z_1]\ [z_2]$,

$$B^{**}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_1)\, z_2^k. \tag{2.52}$$

Se scrie polinomul $B^{**}(z_1, z_2)$ sub forma

$$B^{**}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{m-k}(z_1)\, z_2^k, \tag{2.53}$$

în care $\bar{a}(z_1) = a(\bar{z}_1)$, $\bar{z}_1$ este conjugatul complex al lui $z_1$. Fie matricea pătrată (fig. 2.5) în care $a_i$ sînt coeficienţii din (2.52), (2.53).

$$\begin{bmatrix}
a_m & a_{m-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_m & a_{m-1} & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_m & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_m & \bar{a}_{m-1} & \bar{a}_{m-2} & \cdots & \bar{a}_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & 0 & \bar{a}_m & \bar{a}_{m-1} & \cdots & \bar{a}_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & 0 & 0 & \bar{a}_m & \cdots & \bar{a}_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_{m-1} & \bar{a}_{m-2} & \bar{a}_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_m
\end{bmatrix}$$

Fig. 2.5.

Fie determinantul matricei M :

$$|M| = F(z_1).$$

Fie $x_1 = \dfrac{z_1 + \bar{z}_1}{2}$ $\left(\text{care pentru cazul } |z_1| = 1 \text{ are forma } x_1 = \dfrac{z_1 + z_1^{-1}}{2}\right)$.

**Lema 2.1.** Condiția suficientă ca $B^{**}(z_1, z_2) \neq 0$ pe $D = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$ este ca $F_1(x_1) \neq 0$ pentru $-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$, presupunînd că $a_m$ și $a_0$ nu sînt simultan zero pe $|z_1| = 1$. $(F_1(x_1) = F(z_1)|_{z_1=1})$.

Demonstrația lemei rezultă imediat, datorită faptului că zerourile lui $F_1(x_1)$, în domeniul $-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$, corespunzînd valorilor lui $z_1$ pe cercul $|z_1| = 1$, sînt acele valori pentru care $B^{**}(z_1, z_2)$ trebuie să aibă zerouri sau în $|z_2| = 1$ sau simetrice față de cercul $|z_2| = 1$.

### 2.3.2. Testarea stabilității utilizînd transformările omografice

Transformările omografice (sau biliniare) constituie o tehnică utilizată în mod curent în analiza și sinteza sistemelor 1D și 2D.

Se numește *transformare omografică* o funcție de forma

$$s = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{2.54}$$

care transformă planul complex $(z)$ în planul complex $(s)$.

**Propoziția 2.1.** Orice funcție omografică transformă cercurile și dreptele din $(z)$ în cercuri sau drepte din $(s)$.

*Demonstrație.* Dreptele și cercurile au ecuații de forma $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, cu $A = 0$, respectiv $A \neq 0$. Înlocuind $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, ecuația devine

$$Az\bar{z} + Ez + F\bar{z} + D = 0, \tag{*}$$

unde $A, D \in \mathbb{R}$, $E, F \in \mathbb{C}$ și $\bar{E} = F$ (deoarece $E = B - Ci$, $F = B + Ci$). Din (2.54) rezultă transformarea inversă

$$z = \frac{ds - b}{-cs + a}.$$

Înlocuind pe $z$ în (*), se obține ecuația

$$A_1 s\bar{s} + E_1 s + F_1 \bar{s} + D_1 = 0, \tag{**}$$

unde $A_1 = Ad\bar{d} - E\bar{c}d - Fc\bar{d} + Dc\bar{c}$, $E_1 = -A\bar{b}d + E\bar{a}d + Ec\bar{b} - D\bar{a}c$, $F_1 = -Ab\bar{d} + Eb\bar{c} + Fa\bar{d} - Da\bar{c}$, $D_1 = Ab\bar{b} - E\bar{a}b - Fa\bar{b} + Da\bar{a}$, deci cu $A_1, D_1 \in \mathbb{R}$ $(\bar{A}_1 = A_1, D_1 = \bar{D}_1)$ și $\bar{E}_1 = F_1$; dacă $A_1 = 0$, (**) este ecuația unei drepte și este ecuația unui cerc, dacă $A_1 \neq 0$.

Considerăm transformarea circulară

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}; \quad z = \frac{s + 1}{-s + 1}.$$

Punctele $z = 1$, i, $-1$ se transformă în punctele $s = 0$, i, $\infty$; conform propoziției 2.1, cercul unitate $|z| = 1$ se transformă în dreapta $\mathrm{Re}\, s = 0$ (sau $s = i\omega$), domeniul de stabilitate pentru sisteme discrete $|z| < 1$ se transformă în domeniul de stabilitate al sistemelor continue, $\mathrm{Re}\, s < 0$. De aici rezultă corespondența dintre testele de stabilitate discrete și continue 1D. De exemplu, un polinom discret $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ este stabil, dacă și numai dacă polinomul continuu

$$p(s) = (-s+1)^n a_n \left(\frac{s+1}{-s+1}\right)^n + \ldots + a_1 \left(\frac{s+1}{-s+1}\right) + a_0$$

este polinom Hurwitz (ceea ce se poate testa de exemplu cu criteriul Routh).

Analog, considerînd transformările omografice

$$s_i = \frac{z_i - 1}{z_i + 1}\,;\; z_i = \frac{s_i + 1}{-s_i + 1},\; i = 1, 2,$$

obținem corespondența bijectivă între domeniile $|z_i| < 1$ și $\mathrm{Re}\, s_i < 0$, $i = 1, 2$, respectiv $|z_i| > 1$ și $\mathrm{Re}\, s_i > 0$, $i = 1, 2$. Stabilitatea unui polinom discret $B(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} z_1^i z_2^j$ poate fi testată prin stabilitatea polinomului continuu,

$$B(s_1, s_2) = (-s_1 + 1)^n (-s_2 + 1)^m \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \left(\frac{s_1 + 1}{-s_1 + 1}\right)^i \left(\frac{s_2 + 1}{-s_2 + 1}\right)^j.$$

Astfel, condițiile (2.38) și (2.39) vor fi echivalente pentru cazul continuu cu

a) $B(s_1, 1) \neq 0$, pentru $\mathrm{Re}\, s_1 \leqslant 0$, (2.55)

b) $B(i\omega, s_2) \neq 0$, pentru $\mathrm{Re}\, s_2 \leqslant 0$ și $\omega \in \mathbb{R}$.

### 2.3.3. Testarea stabilității pe baza funcției pondere

S-a arătat că un sistem 2D cauzal admite o reprezentare printr-o funcție de transfer rațională de forma (2.17), (2.18), (2.19). Dacă $H^{**}(0, 0) = \infty$, sistemul este instabil; dacă $H^{**}(0, 0)$ este finită, rezultă că $H^{**}(z_1, z_2)$ este analitică într-o vecinătate a originii $\{|z_1| < r, |z_2| < r\}$ și deci poate fi dezvoltată în serie Taylor,

$$H^{**}(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_{m,n} z_1^m z_2^n. \tag{2.56}$$

Convergența seriei (2.56) poate fi testată cu următorul criteriu:

**Teorema 2.5.** Fie $h$ limita superioară a șirului dublu $\{|h_{m,n}|^{\frac{1}{m+n}}\}$,

$$h = \overline{\lim_{m \text{ și (sau) } n \to \infty}} |h_{m,n}|^{\frac{1}{m+n}}.$$

1°. Dacă $h < 1$, seria (2.56) este absolut convergentă în $D = \{|z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1\}$, $H^{**}(z_1, z_2)$ este mărginită în această regiune şi

$$\lim_{m+n\to\infty} h_{m,n} = 0.$$

2°. Dacă $h > 1$, seria (2.56) este divergentă într-o submulţime a lui $D$ şi $H^{**}(z_1, z_2)$ nu este mărginită în $D$. În plus, există un subşir $\{h_{m_j,n_k}\}$ al lui $\{h_{m,n}\}$ astfel încît

$$\lim_{m_j+n_k\to\infty} h_{m_j,n_k} = 0.$$

*Demonstraţie.* 1°. Dacă $h < 1$, fie $\varepsilon_1 > 0$, astfel încît $a \triangleq h(1+\varepsilon_1) < 1$.

Deoarece $h$ este limită superioară, $|h_{m,n}|^{\frac{1}{m+n}} < h(1+\varepsilon_1)$, cu excepţia cel mult a unui număr finit de termeni ai şirului. Rezultă

$$|h_{m,n}| < a^{m+n}$$

şi

$$\sum_{m,n} |h_{m,n}|\,|z_1|^m|z_2|^n < \sum_{m,n} a^{m+n}|z_1|^m|z_2|^n =$$

$$= \left[\sum_m (a|z_1|)^m\right]\left[\sum_n (a|z_2|)^n\right] = \frac{1}{1-a|z_1|}\cdot\frac{1}{1-a|z_2|},$$

deoarece $0 < a < 1$, $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| \leqslant 1$ (eventual la suma de mai sus se adaugă contribuţia finită a termenilor exceptaţi).

În plus, $\lim\limits_{m+n\to\infty} |h_{m,n}| \leqslant \lim\limits_{m+n\to\infty} a^{m+n} = 0$.

2°. Dacă $h > 1$, alegem $\varepsilon_2 \in (0, 1)$, încît $b \triangleq h(1-\varepsilon_2) > 1$. Atunci există un subşir $\{h_{m_j,n_k}\}$ al lui $\{h_{m,n}\}$, cu proprietatea $|h_{m_j,n_k}|^{\frac{1}{m_j+n_k}} > h(1-\varepsilon_2)$ (altfel ar rezulta că $h(1-\varepsilon_2)$ este mai mare decît limita superioară $h$, contradicţie).

Deoarece $b > 1$, seria $\sum\limits_{m_j,n_k} b^{m_j+n_k} z_1^{m_j} z_2^{n_k}$ este divergentă în $D_1 = \left\{\frac{1}{b} < |z_1| \leqslant 1, \frac{1}{b} < |z_2| \leqslant 1\right\}$, de unde rezultă divergenţa seriei (2.56) în $D_1 \subset D$ şi

$$\lim_{m_j+n_k\to\infty} |h_{m_j,n_k}| > \lim_{m_j+n_k\to\infty} b^{m_j+n_k} = \infty.$$

**Teorema 2.6.** Dacă $H^{**}(z_1, z_2)$ este funcţie raţională, sistemul 2D este BIBO stabil, dacă şi numai dacă

$$h < 1. \tag{2.57}$$

*Demonstraţie.* Suficienţa rezultă din teorema 2.5, punctul 1°,

$$\sum_{m,n} |h_{m,n}| < \frac{1}{(1-a)^2} < \infty, \text{ unde } a = h(1+\varepsilon_1).$$

Invers, dacă sistemul este asimptotic stabil, $H^{**}(z_1, z_2)$ este mărginită pe $D = \{|z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1\}$ şi fiind raţională va fi mărginită şi pe $D_\varepsilon = \{|z_1| \leqslant$

$\leqslant 1 + \varepsilon$, $|z_2| \leqslant 1 + \varepsilon\}$ pentru un $\varepsilon > 0$. Atunci, dacă se face o schimbare de variabilă $z_1^1 = \dfrac{z_1}{1+\varepsilon}$ ; $z_2 = \dfrac{z_2}{1+\varepsilon}$, funcţia $H^{**}((1+\varepsilon)z_1^1, (1+\varepsilon)z_2^1)$ este mărginită în $D^1 = \{|z_1^1| \leqslant 1;\ |z_2^1| \leqslant 1\}$ şi

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty h_{m,n}(1+\varepsilon)^{m+n}(z_1^1)^m (z_1^1)^n$$

este convergentă pe $D^1$.

Pe baza teoremei precedente,

$$\overline{\lim}\,(|h_{m,n}|\,(1+\varepsilon)^{m+n})^{\frac{1}{m+n}} \leqslant 1,$$

de unde $|h_{m,n}|\,(1+\varepsilon)^{m+n} \leqslant 1$ şi $|h_{m,n}|^{\frac{1}{m+n}} \leqslant \dfrac{1}{1+\varepsilon}$, cu excepţia unui număr finit de valori ale perechii $(m, n)$, deci $h \leqslant \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

**Lema 2.2.** Dacă $H^{**}(z_1, z_2)$ este raţională şi $\overline{H} = 1$, singularităţile care pot să producă instabilitate pot să apară numai în următoarele regiuni :

1) $|z_1| = 1$, $z_2$ arbitrar;

2) $z_1$ arbitrar, $|z_2| = 1$. (2.58)

Demonstraţia se poate face pe baza teoremelor 2.1 şi 2.3.

**Teorema 2.7.** Dacă $H^{**}(z_1, z_2)$ este raţională şi nu are singularităţi în regiunile (2.58), atunci următoarele condiţii sînt echivalente şi fiecare reprezintă o condiţie necesară şi suficientă pentru asigurarea stabilităţii BIBO :

a) $|h_{m,n}| \to 0$, cînd $m \to \infty$ sau (şi) $n \to \infty$; (2.59)

b) $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |h_{m,n}|^p < \infty$, $p \geqslant 1$.

Demonstraţia rezultă pe baza teoremelor 2.5, 2.6 şi a lemei 2.2.

## 2.4. Algoritmi de realizare a sistemelor 2D

Considerăm sistemul 2D, descris de ecuaţia de convoluţie

$$y_{kh} = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{k-i,h-j}\, u_{ij}, \tag{2.60}$$

unde $y_{kh} \in K^p$, $u_{ij} \in K^m$, $F_{ij} \in M_{p\times m}(K)$.

Aplicînd transformata $z$ 2$D$, ecuaţia (2.60) devine

$$Y(z_1, z_2) = F(z_1, z_2)\, U(z_1, z_2), \tag{2.61}$$

cu $Y = \mathcal{Z}[y_{ik}]$, $U = \mathcal{Z}[u_{ij}]$ şi $F(z_1, z_2)$ matrice $p \times m$ peste $K(z_1, z_2)$, $F(z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j}$.

Fie $G(z_1, z_2)$ o matrice cu elemente fracţii raţionale din $K(z_1, z_2)$ şi $g(z_1, z_2)$ cel mai mic numitor comun al elementelor matricei $G$. Atunci putem scrie

$$G(z_1, z_2) = \frac{H(z_1, z_2)}{g(z_1, z_2)},$$

unde $H(z_1, z_2) = [h_{ij}(z_1, z_2)]$ este matricea ale cărei elemente sînt polinoame din $K[z_1, z_2]$. Cu identificarea $K[z_1, z_2] = K[z_1][z_2]$ putem scrie

$$g(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} g_k(z_1) z_2^k, \text{ unde } n = \delta_{z_2} g,$$

$$h_{ij}(z_1, z_2) = \sum_{k} h_{ijk}(z_1) z_2^k.$$

*Definiţia 2.13.* Matricea $G(z_1, z_2)$ se numeşte matrice *proprie*, dacă

1° $\delta_{z_2} h_{ij} \leqslant n, \quad \forall\, i, j,$

2° $\delta g_k \leqslant \delta g_n$ şi $\delta h_{ijk} \leqslant \delta g_n, \ \forall i, j, k.$

Dacă în 1° şi 2° inegalităţile sînt stricte, $G(z_1, z_2)$ se numeşte matrice *strict proprie.*

Se poate arăta că matricea $F(z_1, z_2)$ din (2.61) este proprie, dacă şi numai dacă sistemul (2.60) este cauzal; $F(z_1, z_2)$ se numeşte *matricea de transfer* a sistemului (2.60).

Considerăm modelul de stare Roesser,

$$\begin{bmatrix} x^{o}(i+1, j) \\ x^{v}(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{o}(i, j) \\ x^{v}(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \tag{2.62}$$

$$y(i, j) = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x^{o}(i, j) \\ x^{v}(i, j) \end{bmatrix} + D_1 u(i, j),$$

unde $u_{ij} = u(i, j)$ sînt intrările, $y_{ij} = y(i, j)$ ieşirile, $x^{o}(i, j)$, $x^{v}(i, j)$ stările orizontale, respectiv verticale.

Aplicînd transformarea $z$ 2D şi considerînd condiţiile iniţiale nule, ecuaţiile (2.62) devin

$$\begin{bmatrix} z_1 X^{o}(z_1, z_2) \\ z_2 X^{v}(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{o}(z_1, z_2) \\ X^{v}(z_1, z_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U(z_1, z_2),$$

$$Y(z_1, z_2) = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} X^{o}(z_1, z_2) \\ X^{v}(z_1, z_2) \end{bmatrix} + D_1 U(z_1, z_2),$$

de unde se obține (eliminînd vectorii stărilor) ecuația (2.61), cu matricea de transfer

$$F(z_1, z_2) = [C_1\ C_2] \begin{bmatrix} z_1 I_{n_1} - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I_{n_2} - A_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D_1. \qquad (2.63)$$

Acest calcul sugerează următoarea definiție.

*Definiția 2.14.* Ansamblul $\Sigma = (A, B, C, D_1)$, unde $A, B, C, D_1$ sînt matrice de dimensiuni corespunzătoare, se numește *realizare* a matricei de transfer (proprii) $F(z_1, z_2)$, dacă

$$F(z_1, z_2) = C \left( \begin{bmatrix} z_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & z_2 I_{n_2} \end{bmatrix} - A \right)^{-1} B + D_1. \qquad (2.64)$$

**Algoritmul 2.1** (de realizare în două nivele)[29]. I. Se determină o realizare minimală 1D peste inelul principal $K^{pr}(z_2)$ (al funcțiilor raționale proprii, cu coeficienți in $K$), $\Sigma_1 = (A(z_2), B(z_2), C(z_2), D(z_2))$; $\Sigma_1$ se va numi *primul nivel de realizare* a lui $F(z_1, z_2)$.

II. Se determină realizări 1D ale matricelor $A(z_2)$, $B(z_2)$, $C(z_2)$, $D(z_2)$,

$$\Sigma A = (AA, AB, AC, AD),$$
$$\Sigma B = (BA, BB, BC, BD),$$
$$\Sigma C = (CA, CB, CC, CD),$$
$$\Sigma D = (DA, DB, DC, DD)$$

(*al doilea nivel de realizare* este $\Sigma_2 = (\Sigma A, \Sigma B, \Sigma C, \Sigma D)$).

III. O realizare a lui $F(z_1, z_2)$ este $\Sigma = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, de forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C_1\ \ C_2],$$

cu

$$A_1 = AD, \quad A_2 = [AC\ \ BC\ \ 0\ \ 0], \quad B_1 = BD, \qquad (2.65)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} AA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & BA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & CA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & DA \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} AB \\ 0 \\ CB \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ BB \\ 0 \\ DB \end{bmatrix},$$

$$C_1 = CD, \quad C_2 = [0\ \ 0\ \ CC\ \ DC], \quad \tilde{D} = DD.$$

*Demonstrație.* $\Sigma_1$ fiind o realizare 1D a lui $F(z_1, z_2)$, va avea loc egalitatea

$$F(z_1, z_2) = C(z_2)\,(z_1 I - A(z_2))^{-1} B(z_2) + D(z_2), \qquad (2.66)$$

a cărei interpretare dinamică este următoarea:

$$X_{t+1}(z_2) = A(z_2) X_t(z_2) + B(z_2) U_t(z_2), \qquad (2.67)$$
$$Y_t(z_2) = C(z_2) X_t(z_2) + D(z_2) U_t(z_2),$$



Scanned with OKEN Scanner

unde $X_i$, $U_i$, $Y_i$ sînt serii formale din $K^n[[z_2^{-1}]]$, $K^m$ $[[z_2^{-1}]]$ și, respectiv, $K^p[[z_2^{-1}]]$, obținute cu transformate $z$ 1$D$ în $z_2$ ale șirurilor $x_{ij}$, $u_{ij}$, $y_{ij}$:

$$X_i(z_2) = \sum_{j=0}^{\infty} x(i, j)\, z_2^{-1}, \quad U_i(z_2) = \sum_{j=0}^{\infty} u(i, j)\, z_2^{-j},$$

$$Y_i(z_2) = \sum_{j=0}^{\infty} y(i, j)\, z_2^{-j}.$$

Produsul $A(z_2)X_i(z_2)$ se definește pe baza produsului din inelul seriilor formale $K$ $[[z_2^{-1}]]$, dezvoltînd elementele lui $A(z_2)$ (care sînt fracții raționale proprii) în serie în raport cu $z_2^{-1}$ și apoi înmulțind aceste serii cu elementele corespunzătoare ale lui $X_i(z_2)$.

Instrucțiunea II conduce la reprezentările matricelor de transfer

$$A(z_2) = AC(z_2 I - AA)^{-1} AB + AD \tag{2.68}$$

și analog pentru $B(z_2)$, $C(z_2)$, $D(z_2)$.

Vom nota stările acestor sisteme cu $a(i, j)$, $b(i, j)$, $c(i, j)$, $d(i, j)$, ieșirile cu $y_a(i, j)$ etc., iar intrările vor fi, conform relațiilor (2.67), respectiv $x(i, j)$ și $u(i, j)$.

Se obțin ecuațiile de stare și de ieșire:

$$A(z_2)\begin{cases} a(i, j+1) = AA\, a(i, j) + AB\, x(i, j), \\ y_a(i, j) = AC\, a(i, j) + AD\, x(i, j); \end{cases}$$

$$B(z_2)\begin{cases} b(i, j+1) = BA\, b(i, j) + BB\, u(i, j), \\ y_b(i, j) = BC\, b(i, j) + BD\, u(i, j); \end{cases}$$

$$C(z_2)\begin{cases} c(i, j+1) = CA\, c(i, j) + CB\, x(i, j), \\ y_c(i, j) = CC\, c(i, j) + CD\, x(i, j); \end{cases} \tag{2.69}$$

$$D(z_2)\begin{cases} d(i, j+1) = DA\, d(i, j) + DB\, u(i, j); \\ y_d(i, j) = DC\, d(i, j) + DD\, u(i, j). \end{cases}$$

Formulele (2.67) conduc la relațiile

$$\begin{aligned} x(i+1, j) &= y_a(i, j) + y_b(i, j), \\ y(i, j) &= y_c(i, j) + y_d(i, j). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Introducem stările orizontale $x^o(i, j)$ și verticale $x^v(i, j)$ prin

$$x^o(i, j) = x(i, j),$$

$$x^v(i, j) = \begin{bmatrix} a(i, j) \\ b(i, j) \\ c(i, j) \\ d(i, j) \end{bmatrix}.$$

Din (2.69) și (2.70) obținem

$$x^{\circ}(i+1, j) = AD\, x(i, j) + AC\, a(i, j) + BC\, b(i, j) + BD\, u(i, j) =$$
$$= A_1\, x^{\circ}(i, j) + A_2 x^{v}(i, j) + B_1\, u(i, j)$$

și analog

$$x^{v}(i, j+1) = A_3 x^{\circ}(i, j) + A_4 x^{v}(i, j) + B_2\, u(i, j),$$
$$y(i, j) = CD\, x(i, j) + CC\, c(i, j) + DC\, d(i, j) + DD\, u(i, j) =$$
$$= C_1\, x^{\circ}(i, j) + C_2 x^{v}(i, j) + \widetilde{D}\, u(i, j),$$

unde matricele $A_i$, $C_i$ și $\widetilde{D}$ sînt cele din formulele (2.65). Relațiile (2.66) și (2.68) asigură faptul că matricea de transfer a acestui sistem 2D este $F(z_1, z_2)$.

Schema de funcționare a acestui sistem este dată în figura 2.6.

Fig. 2.6.

Am văzut că cele două nivele de realizare $\Sigma_1$ și $\Sigma_2$ ale unei matrice de transfer conduc la o realizare de tip Roesser a acestei matrice; invers, pentru oricare astfel de sistem se poate obține imediat o realizare în două nivele.

**Teorema 2.8.** Pentru sistemele 2D (2.62) o realizare în două nivele este:

$$\Sigma_1: \quad A(z_2) = A_2(z_2 I - A_4)^{-1} A_3 + A_1,$$
$$B(z_2) = A_2(z_2 I - A_4)^{-1} B_2 + B_1, \tag{2.71}$$
$$C(z_2) = C_2(z_2 I - A_4)^{-1} A_3 + C_1,$$
$$D(z_2) = C_2(z_2 I - A_4)^{-1} B_2 + D_1;$$

$$\Sigma_2: \quad AA = A_4,\; AB = A_3,\; AC = A_2,\; AD = A_1,$$
$$BA = A_4,\; BB = B_3,\; BC = A_2,\; BD = B_1, \tag{2.72}$$
$$CA = A_4,\; CB = A_3,\; CC = C_2,\; CD = D_1,$$
$$DA = A_4,\; DB = B_3,\; DC = C_2,\; DD = D_1.$$



Scanned with OKEN Scanner

*Demonstrație.* Evident, relațiile (2.72) se obțin din (2.71). Rămîne să arătăm că matricea de transfer a sistemului 2D verifică (2.66).

Vom utiliza egalitatea

$$\begin{bmatrix} z_1 I - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 I - A_1 - A_2(z_2 I - A_4)^{-1} A_3 & A_2(z_2 I - A_4)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix} \triangleq ML.$$

Se verifică ușor că inversele matricelor de forma

$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & L_4 \end{bmatrix}$, respectiv $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_4 \end{bmatrix}$, cu $L_1, L_4, M_1, M_4$ nesingulare sînt

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} L_1^{-1} & 0 \\ -L_4^{-1} L_2 L_1^{-1} & L_4^{-1} \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & -M_1^{-1} M_2 M_4^{-1} \\ 0 & M_4^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.73}$$

Calculăm matricea de transfer,

$$F(z_1, z_2) = [C_1 \; C_2] \begin{bmatrix} z_1 I - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D =$$

$$= [C_1 \; C_2] L^{-1} M^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D.$$

Dar, conform relațiilor (2.73),

$$[C_1 \; C_2] L^{-1} = [C_1 \; C_2] \begin{bmatrix} I & 0 \\ (z_2 I - A_4)^{-1} A_3 & (z_2 I - A_4)^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= [C_1 + C_2(z_2 I - A_4)^{-1} A_3 \; C_2(z_2 I - A_4)^{-1}] = [C(z_2) \; C_2(z_2 I + A_4)^{-1}]$$

și

$$M^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_1 I - A(z_2))^{-1} & (z_1 I - A(z_2))^{-1} A_2(z_2 I - A_4)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (z_1 I - A(z_2))^{-1} (B_1 + A_2(z_2 I - A_4)^{-1} B_2) \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_1 I - A(z_2))^{-1} B(z_2) \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Se obține egalitatea (2.66),

$$F(z_1, z_2) = C(z_2)(z_1 I - A(z_2))^{-1} B(z_2) + C_2(z_2 I - A_4)^{-1} B_2 + D_1 =$$

$$= C(z_2)(z_1 I - A(z_2))^{-1} B(z_2) + D(z_2).$$

Din demonstrația teoremei rezultă și următorul corolar.

**Corolarul 2.1.** Dacă matricea de transfer $F(z_1, z_2)$ se scrie sub forma (2.66), cu $A(z_2)$, $B(z_2)$, $C(z_2)$, $D(z_2)$ date de formulele (2.71), atunci o realizare a ei este

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \; C_2] \quad D = D_1.$$

*Exemplul* 2.1. Considerăm funcţia de transfer ($p = m = 1$),

$$F(z_1, z_2) = \frac{h(z_1, z_2)}{q(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} h_i(z_2)\, z_1^i}{\sum_{i=0}^{n} q_i(z_2)\, z_1^i},$$

unde $q_n(z_2)$ este polinom monic, iar $\delta q_n \geqslant \delta h_i$ şi $\delta q_n \geqslant \delta q_i$, $i = \overline{1, n-1}$ ($F$ fiind strict propriu).

Un prim nivel de realizare va fi $\Sigma_1 = (A(z_2), B(z_2), C(z_2), D(z_2))$, cu $A(z_2)$, $B(z_2)$, $C(z_2)$ în formă standard controlabilă,

$$A(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{q_0(z_2)}{q_n(z_2)} & -\dfrac{q_1(z_2)}{q_n(z_2)} & \dots & -\dfrac{q_{n-1}(z_2)}{q_n(z_2)} \end{bmatrix}, \quad B(z_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{h_0(z_2)}{q_n(z_2)} & \dfrac{h_1(z_2)}{q_n(z_2)} & \dots & \dfrac{h_{n-1}(z_2)}{q_n(z_2)} \end{bmatrix}, \quad D(z_2) = 0.$$

Se determină apoi al doilea nivel de realizare, utilizînd forma standard observabilă,

$$AA = CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -q_{n_0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -q_{n_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -q_{n,m-1} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} -\bar{q}_{00} & \dots & -\bar{q}_{n-1,0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -\bar{q}_{0,m-1} & \dots & -\bar{q}_{n-1,m-1} \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{\bar{q}_{0m}}{\bar{q}_{nm}} & -\dfrac{\bar{q}_{1m}}{\bar{q}_{nm}} & \dots & -\dfrac{\bar{q}_{n-1,m}}{\bar{q}_{nm}} \end{bmatrix},$$

$$BA = BB = BC = 0, \quad BD = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$CB = \begin{bmatrix} h_{00} & \dots & h_{n-1,0} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{0,m-1} & \dots & h_{n-1,m-1} \end{bmatrix}, \quad CC = [0 \dots 0 \;\; 1], \quad CD = \left[\frac{\bar{h}_{0m}}{q_{nm}} \dots \frac{h_{n-1,m}}{q_{nm}}\right],$$

$$DA = DB = DC = DD = 0,$$

unde $m = \delta q_n$, $h_{ij}$ $(q_{ij})$ este coeficientul lui $z_2^j$ în polinomul $h_i(z_2)$ $(q_i(z_2))$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ și

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} - \frac{h_{im}}{q_{nm}} q_{nj},$$

$$\bar{q}_{ij} = q_{ij} - \frac{q_{im}}{q_{nm}} q_{nj}.$$

Rezultă matricea $A_1 = AD$, de ordin $n$, $A_4 = \begin{bmatrix} AA & 0 \\ 0 & CA \end{bmatrix}$, de ordin $2m$, deci dimensiunea acestei realizări este $n + 2m$. O realizare de dimensiune mai mică decît $n + 2m$ poate fi obținută cu următoarea metodă.

Fie $F(z_1, z_2)$ o funcție de transfer proprie,

$$F(z_1, z_2) = \frac{h(z_1, z_2)}{q(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} h_i(z_2) z_1^i}{\sum_{i=0}^{n} q_i(z_2) z_1^i}$$

(adică, dacă $m = \delta q_n$, atunci $m \geqslant \delta q_i$ și $m \geqslant \delta h_i$, $i = \overline{1, n}$).

Dacă $h(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} h_{ij} z_1^i z_2^j$, $q(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} q_{ij} z_1^i z_2^j$, atunci $h_i(z_2) = \sum_{j=0}^{m} h_{ij} z_2^j$ și $q_i(z_2) = \sum_{j=0}^{m} q_{ij} z_1^j$, $i = \overline{1, n}$.

**Algoritmul 2.2.** I. Se determină conținutul $c(z_2)$ al polinomului $h(z_1, z_2)$ (deci $c(z_2)$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor $h_i(z_2)$, $i = \overline{1, n}$) și $k = \delta c$, $k \geqslant 0$.

II. Se factorizează polinoamele

$$h_i(z_2) = c(z_2)\, \bar{h}_i(z_2), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.74}$$
$$q_n(z_2) = r_1(z_2)\, r_2(z_2),$$

cu $\delta r_2 \geqslant k$, $\delta r_1 \geqslant \max_i (\delta h_i) - k = \max_i \delta \bar{h}_i$

(factorizarea lui $q_n$ se face eventual peste închiderea algebrică $\bar{K}$ a corpului $K$).

III. Primul nivel de realizare este $\Sigma_1 = (A(z_2), B(z_2), C(z_2), D(z_2))$, unde

$$A(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{q_0(z_2)}{q_n(z_2)} & -\frac{q_1(z_2)}{q_n(z_2)} & \dots & -\frac{q_{n-1}(z_2)}{q_n(z_2)} \end{bmatrix}, \quad B(z_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \frac{c(z_1)}{r_2(z_2)} \end{bmatrix},$$

$$C(z_2) = \left[\frac{\bar{h}_0(z_2)}{r_1(z_2)} \ldots \frac{\bar{h}_{n-1}(z_2)}{r_1(z_2)}\right] + \frac{\bar{h}_n(z_2)}{r_1(z_2)}\left[-\frac{q_0(z_2)}{q_n(z_2)} \ldots -\frac{q_{n-1}(z_2)}{q_n(z_2)}\right], \quad (2.75)$$

$$D(z_2) = \left[\frac{h_n(z_2)}{q_n(z_2)}\right].$$

IV. Se consideră matricele de transfer 1D,

$$\bar{A}(z_2) = \left[-\frac{q_0(z_2)}{q_n(z_2)} \ldots -\frac{q_{n-1}(z_2)}{q_n(z_2)}\right] \quad \bar{B}(z_2) = \left[\frac{c(z_2)}{r_2(z_2)}\right],$$

$$\bar{C}(z) = \left[\frac{\bar{h}_0(z_2)}{r_1(z_2)} \ldots \frac{\bar{h}_{n-1}(z_2)}{r_1(z_2)}\right] \quad \bar{D}(z_2) = \left[\frac{\bar{h}_n(z_2)}{r_1(z_2)}\right] \quad (2.76)$$

şi se determină realizări ale acestor matrice (de exemplu, în forma standard observabilă),

$$\Sigma\bar{A} = (\bar{A}A, \bar{A}B, \bar{A}C, \bar{A}D) \ (m\times m, m\times n, 1\times m, 1\times n),$$

$$\Sigma\bar{B} = (\bar{B}A, \bar{B}B, \bar{B}C, \bar{B}D) \ (m\times m, m\times 1, 1\times m, 1\times l),$$

$$\Sigma\bar{C} = (\bar{C}A, \bar{C}B, \bar{C}C, \bar{C}D) \ ((m-k)\times(m-k), (m-k)\times n, 1\times(m-k), 1\times n),$$

$$\Sigma\bar{D} = (\bar{D}A, \bar{D}B, \bar{D}C, \bar{D}D) \ ((m-k)\times(m-k), (m-k)\times 1, 1\times(m-k), 1\times 1),$$

cu $\bar{A}A = \bar{B}A, \bar{C}A = \bar{D}A,$ (2.77)

$$\bar{A}C = \bar{B}C, \ \bar{C}C = \bar{D}C.$$

V. O realizare a funcţiei de transfer $F(z_1, z_2)$ este

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \ \tilde{C} = [C_1, C_2], \ \tilde{D} = D_1,$$

unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \hline & & \bar{A}D & \end{bmatrix} (n\times n), \quad A_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \vdots & \ldots & \vdots \\ \hline & \bar{A}C & & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right] (n\times(2m-k)),$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \bar{A}B \\ \bar{D}B\cdot\bar{A}D + \bar{C}B \end{bmatrix} ((2m-k)\times n) \quad A_4 = \begin{bmatrix} \bar{A}A & 0 \\ \bar{D}B\cdot\bar{A}C & \bar{C}A \end{bmatrix} ((2m-k)\times(2m-k)), \quad (2.78)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \bar{B}D \end{bmatrix} (n \times 1) \quad B_2 = \begin{bmatrix} \bar{B}B \\ \bar{D}B \cdot \bar{B}D \end{bmatrix} ((2m-k) \times 1),$$

$$C_1 = (\bar{C}D + \bar{D}D \cdot \bar{A}D] \, (1 \times n) \quad C_2 = [\bar{D}D \cdot \bar{A}C \;\; \bar{C}C] \, (1 \times (2m-k)),$$

$$D_1 = \left[\frac{h_{nm}}{q_{nm}}\right] = \bar{D}D \cdot \bar{B}D.$$

*Demonstrație.* Formulele (2.75) dau un prim nivel de realizare, deoarece

$$|z_1 I_n - A(z_2)| = \frac{q(z_1, z_2)}{q_n(z_1, z_2)}$$

și

$$C(z_2)\,(z_2 I - A\,(z_2))^{-1} \;\; B(z_2) + D(z_2) =$$

$$= C(z_2) \frac{q_n(z_2)}{q(z_1, z_2)} \begin{bmatrix} 1 \\ z_1 \\ \cdots \\ z^{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{c(z_2)}{r_2(z_2)} + \frac{h_n(z_2)}{q_n(z_2)} =$$

$$= \frac{q_n(z_2)\, c(z_2)}{q(z_1, z_2)\, r_2(z_2)} \left( \frac{\bar{h}_0(z_2) + \bar{h}_1(z_2) z_1 + \ldots + \bar{h}_{n-1}(z_2)\, z_1^{n-1}}{r_1(z_2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{h}_n(z_2)}{r_1(z_2)} \, \frac{q_0(z_2) + q_1(z_2)\, z_1 + \ldots + q_{n-1}(z_2)\, z_1^{n-1}}{q_n(z_2)} \right) + \frac{h_n(z_2)}{q_n(z_2)} =$$

(cu formulele (2.74))

$$= \frac{h(z_1, z_2) - h_n(z_2)\, z_1^n}{q(z_1, z_2)} - \frac{h_n(z_2)\,(q(z_1, z_2) - q_n(z_2)\, z_1^n)}{q(z_1, z_2)\, q_n(z_2)} + \frac{h_n(z_2)}{q_n(z_2)} =$$

$$= \frac{h(z_1, z_2)}{q(z_1, z_2)} = F(z_1, z_2).$$

Realizările din al doilea nivel verifică (2.77), deoarece fracțiile din $C(z_2)$ și $D\,(z_2)$ au același numitor $r_1(z_2)$, iar $B\,(z_2)$ se poate scrie sub forma

$$B(z_2) = \frac{c(z_2)\, r_1(z_2)}{q_n(z_2)}$$

și are același numitor cu fracțiile din matricea $A(z_2)$.

Arătăm că matricele definite de formulele (2.78) verifică (2.71):

$$A_2\,(z_2I-A_4)^{-1}\,A_3+A_1=$$

$$=A_2\begin{bmatrix} z_2I_m-\bar{A}A & 0 \\ -\bar{D}B\cdot\bar{B}D & z_2I_{m-k}-\bar{C}A\end{bmatrix}^{-1}A_3+A_1=\text{(conform (2.73))}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \bar{A}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(z_2I-\bar{A}A)^{-1} & 0\\ (z_2I-\bar{C}A)^{-1}\bar{D}B\cdot\bar{A}C\,(z_2I-\bar{A}A)^{-1} & (z_2I-\bar{C}A)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{A}B\\ \bar{D}B\cdot\bar{A}D+\bar{C}D\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0\quad 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ \hline & \bar{A}D & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\quad 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ \hline \bar{A}C(z_2I-\bar{A}A)^{-1}\bar{A}B+\bar{A}D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\quad 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ \hline & \bar{A}(z_2) & \end{bmatrix}=A(z_2).$$

Analog

$$A_2(z_2I-A_4)^{-1}B_2+B_1=\begin{bmatrix}0\\ \bar{A}C(z_2I-\bar{A}A)^{-1}\bar{B}B+\bar{B}D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \bar{B}(z_2)\end{bmatrix}=B\,(z_2)$$

$$C_2\,(z_2I-A_4)^{-1}A_3+C_1=$$

$$=\bar{D}D\cdot\bar{A}C\,(z_2I-\bar{A}A)^{-1}\bar{A}B+\bar{C}C(z_2I-\bar{C}A)^{-1}\bar{D}B\cdot\bar{A}C(z_2I-\bar{A}A)^{-1}\bar{A}B+$$

$$+\bar{C}C\,(z_2I-\bar{C}A)^{-1}\bar{D}B\cdot\bar{A}D+\bar{C}C(z_2I-\bar{C}A)^{-1}\bar{C}B+\bar{C}D+\bar{D}D\,\bar{A}D=$$

$$=\bar{D}D\,\bar{A}(z_2)+\bar{C}C(z_2I-\bar{C}A)^{-1}\bar{D}B[\bar{A}D+\bar{A}C(z_2I-\bar{A}A)^{-1}\bar{A}B]+\bar{C}(z_2)=$$

$$=[\bar{D}D+\bar{D}C(z_2I-\bar{D}A)^{-1}\bar{D}B]\,\bar{A}(z_2)+\bar{C}(z_2)=\bar{C}(z_2)+\bar{D}(z_2)\,\bar{A}(z_2)=C(z_2),$$

$$C_2(z_2I-A_4)^{-1}B_2+D_1=$$

$$=\bar{D}D\,\bar{A}C(z_2I-\bar{A}A)^{-1}\,\bar{B}B+\bar{C}C(z_2I-\bar{C}A)^{-1}\,\bar{D}B\cdot\bar{A}C(z_2I-\bar{A}A)^{-1}\bar{B}B+$$

$$+\bar{C}C(z_2I-\bar{C}A)^{-1}\bar{D}B\cdot\bar{B}D+\bar{D}D\cdot\bar{B}D=[\bar{D}D+\bar{D}C(z_2I-\bar{D}A)^{-1}\bar{D}B]\,\bar{A}C(z_2I-$$

$$-\bar{A}A)^{-1}\bar{B}B+\bar{D}C(z_2I-\bar{D}A)^{-1}\bar{D}B\cdot\bar{B}D+\bar{D}D\cdot\bar{B}D=\bar{D}(z_2)\,[\bar{B}(z_2)-\bar{B}D]+$$

$$+[\bar{D}(z_2)-\bar{D}D]\,\bar{B}D+\bar{D}D\cdot\bar{B}D=\bar{D}(z_2)\,\bar{B}(z_2)=D(z_2).$$

Din corolarul 2.1 rezultă că formulele (2.78) dau o realizare a funcției de transfer $F\,(z_1,z_2)$ de dimensiune $n+2m-k$.

*Observația 2.4.* Dacă $K=\mathbb{R}$ și $k=\delta\, c$ este număr impar, realizarea de dimensiune $n+2m-k$ poate să fie cu coeficienți din $\mathbb{C}$, dacă nu poate fi determinată o factorizare (2.74) pentru $q_n(z_2)$, cu $r_2\in\mathbb{R}[z_2]$ și $\delta\, r_2\geqslant k$; în acest caz considerăm un divizor $c_1(z_2)$ de grad $k-1$ al conținutului $c(z_2)$ și aplicăm algoritmul cu $k-1$ în loc de $k$, factorizarea lui $q_n(z_2)$ rezultînd cu coeficienți reali. În final vom obține o realizare peste $\mathbb{R}$, dar de dimensiune $n+2m-k+1$.

Pe de altă parte, dacă $h(z_1, z_2)$ este polinom primitiv (vezi definiția 1.15), atunci $k = 0$ și dimensiunea realizării va fi $n + 2m$.

Dacă $h(z_1, z_2)$ este separabil ($h(z_1, z_2) = c(z_2)\ \tilde{h}(z_1)$), atunci $k = m$ și dimensiunea realizării este $n + m$.

*Observația 2.5.* Inversînd rolul variabilelor $z_1$ și $z_2$, dacă $h(z_1, z_2) = \tilde{c}(z_1)h^*(z_1, z_2)$ cu $h^*$ polinom primitiv și $\tilde{c}(z_1)$ conținutul lui $h$ avînd gradul $\tilde{k}$, algoritmul conduce la o realizare de dimensiune $m+2n-\tilde{k}$; în cazul $K = \mathbb{R}$, dacă această realizare este complexă, se poate obține o realizare reală de dimensiune $m + 2n - \tilde{k}+1$. Prin urmare, pentru a obține o realizare de dimensiune mai mică, se determină conținutul polinomului $h(z_1, \tilde{k}z_2)$ în raport cu $z_1$ (respectiv cu $z_2$); dacă acesta are gradul $k$ (respectiv $\tilde{k}$), se compară $n+2m-k$ cu $m+2n-\tilde{k}$ și se alege varianta care corespunde numărului mai mic.

*Observația 2.6.* Se poate formula un algoritm similar pornind de la factorizarea primitivă a numitorului:

I. Se determină conținutul $c(z_2)$ al polinomului $q(z_1, z_2)$.

II. Se factorizează polinoamele

$$q_i(z_2) = c(z_2)\ \bar{q}_i(z_2),\ i = \overline{1, n}.$$

III. Se scrie primul nivel de realizare $\Sigma_1 = (A(z_2), B(z_2), C(z_2), D(z_2))$, unde

$$A(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\dfrac{\bar{q}_0(z_2)}{\bar{q}_n(z_2)} & & -\dfrac{\bar{q}_1(z_2)}{\bar{q}_n(z_2)} & \dots & -\dfrac{\bar{q}_{n-1}(z_2)}{\bar{q}_n(z_2)} \end{bmatrix},$$

$$B(z_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ C(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{h_0(z_2)}{q_n(z_2)} & \dots & \dfrac{h_{n-1}(z_2)}{q_n(z_2)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{h_n(z_2)}{q_n(z_2)} \begin{bmatrix} -\dfrac{\bar{q}_0(z_2)}{\bar{q}_n(z_2)} & \dots & -\dfrac{\bar{q}_{n-1}(z_2)}{\bar{q}_n(z_2)} \end{bmatrix};\ D(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{h_n(z_2)}{q_n(z_2)} \end{bmatrix}.$$

IV. Se consideră matricele de transfer 1D

$$\bar{A}(z_2) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\bar{q}_0(z_2)}{\bar{q}_n(z_2)} & \dots & -\dfrac{\bar{q}_{n-1}(z_2)}{\bar{q}_n(z_2)} \end{bmatrix},\ \bar{B}(z_2) = [1],$$

$$\bar{C}(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{h_0(z_2)}{h_n(z_2)} & \dots & \dfrac{h_{n-1}(z_2)}{h_n(z_2)} \end{bmatrix},\ \bar{D}(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{h_n(z_2)}{q_n(z_2)} \end{bmatrix}$$

și se determină realizări ale lor.

V. Se obține o realizare a sistemului 2D, cu formule analoage cu (2.78). Această realizare va fi peste $K$ (nu peste $\bar{K}$) și va avea dimensiunea $n+2m-\delta c$.

*Exemplul* 2.2. Considerăm funcția de transfer

$$F(z_1, z_2) = \frac{z_1^2 z_2^2 + z_1 z_2^2 - z_1^2 z_2 - z_1 + z_2 - 1}{z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2 + 1}.$$

O scriem cu polinoame din $K\,[z_2]\,[z_1]$, scoțind în evidență conținutul polinomului $h\,(z_1, z_2)$,

$$F(z_1, z_2) = \frac{(z_2 - 1)\,[z_2 z_1^2 + (z_2 + 1)\, z_1 + 1]}{(z_2^2 + z_2)\, z_1^2 + z_2 z_1 + 1}.$$

Avem $m = 2,\ n = 2,\ k = \delta c(z_2) = 1$;

$$c(z_2) = z_2 - 1,\ \bar{h}_2(z_2) = z_2,\ \bar{h}_1(z_2) = z_2 + 1;\ \bar{h}_0(z_2) = 1;$$

$$q_2(z_2) = z_2^2 + z_2,\ q_1(z_2) = z_2,\ q_0(z_2) = 1.$$

Factorizăm $q_2(z_2) = z_2(z_2 + 1) = r_1(z_2)\, r_2(z_2)$, unde

$$\delta r_1 = 1 = k,$$

$$\delta r_2 = 1 = \max_{i=0,1,2} \delta \bar{h}_i.$$

Primul nivel de realizare este

$$A(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{z_2^2 + z_2} & -\dfrac{z_2}{z_2^2 + z_2} \end{bmatrix},\quad B(z_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1} \end{bmatrix},$$

$$C(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z_2} & \dfrac{z_2 + 1}{z_2} \end{bmatrix} + \frac{z_2}{z_2} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{z_2^2 + z_2} & -\dfrac{z_2}{z_2^2 + z_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{z_2}{z_2^2 + z_2} & \dfrac{z_2^2 + z_2 + 1}{z_2^2 + z_2} \end{bmatrix},$$

$$D(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{z_2^2 - z_2}{z_2^2 + z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1} \end{bmatrix}.$$

Scriem matricele de transfer 1D,

$$\bar{A}(z_2) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{z_2^2 + z_2} & -\dfrac{z_2}{z_2^2 + z_2} \end{bmatrix},\quad \bar{B}(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{z_2^2 - z_2}{z_2^2 + z_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{2z_2}{z_2^2 + z_3} + 1 \end{bmatrix},\quad \bar{C}(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z_2} & \dfrac{z_2 + 1}{z_2 + 1} \end{bmatrix},\quad \bar{D}(z_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{z_2}{z_2} \end{bmatrix} = [1]$$

şi determinăm realizări ale lor în forma standard observabilă care verifică (2.77) (al doilea nivel de realizare)

$$\bar{A}A = \bar{B}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}C = \bar{B}C = [0 \;\; 1], \quad \bar{A}D = [0\; 0],$$

$$\bar{B}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B}D = [1],$$

$$\bar{C}A = \bar{D}A = [0], \quad \bar{C}B = [1 \;\; 1], \quad \bar{C}C = \bar{D}C = [1], \quad \bar{C}D = [0 \;\; 1],$$

$$\bar{D}B = [0], \qquad \bar{D}D = [1].$$

O realizare a funcţiei de transfer $F(z_1, z_2)$ va fi (conform (2.78)) $\Sigma = (A, B, C, D)$, cu

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \;\; C_2], \quad D = D_1,$$

unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0 \;\; 1], \quad C_2 = [0 \;\; 1 \;\; 1], \quad D_1 = [1].$$

Într-adevăr,

$$\det \begin{bmatrix} z_1 I - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix} = z_2 q(z_1, z_2) = z_2 (z_2^2 z_1^2 + z_2 z_1^2 + z_1 z_2 + 1)$$

şi

$$[C_1 \;\; C_2] \begin{bmatrix} z_1 I - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D =$$

$$= [0\; 1\; 0\; 1\; 1] \begin{bmatrix} z_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & z_2+1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + [1] =$$

$$= \frac{1}{z_2 q(z_1, z_2)} [0\; 1\; 0\; 1\; 1] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & z_2^2 z_1(z_2+1) & x & z_2^2 z_1 & x \\ x & x & x & x & x \\ x & -z_2(z_1 z_2+1) & x & z_1^2 z_2^2 & x \\ x & z_2(z_1+1)(z_2+1) & x & -z_1 z_2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + [1] =$$

$$= \frac{h(z_1, z_2)}{q(z_1, z_2)} = F(z_1, z_2).$$

*Exemplul* 2.3. Se consideră funcţia de transfer

$$F(z_1, z_2) = \frac{z_1^2 z_2^2 + 2z_1 + z_2 + 1}{z_1^2 z_2^2 + 2z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_1 z_2 + z_2^2} = \frac{h(z_1, z_2)}{q(z_1, z_2)},$$

pentru corpul $K = GF(3)$; $GF(3) = \{0, 1, 2,\}$, cu adunarea şi înmulţirea modulo 3,

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| · | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

Deoarece $h(z_1, z_2)$ este polinom primitiv, se va recurge la algoritmul bazat pe factorizarea numitorului $q(z_1, z_2)$. Conţinutul lui $q(z_1, z_2)$ în raport cu variabila $z_2$ este $c(z_2) = z_2$, iar în raport cu $z_1$ este $z_1 + 2$,

$$q(z_1, z_2) = z_2[(z_2 + 2) z_1^2 + (z_2 + 1) z_1 + z_2]$$

sau

$$q(z_1, z_2) = (z_1 + 2)[(z_1 + 2) z_2^2 + 2z_1 z_2].$$

Alegem prima factorizare. Atunci $n = 2$, $m = 2$, $k = 1$ şi

$$h_0 = z_2 + 1, \; h_1 = 2, \; h_2 = z_2^2,$$

$$\bar{q}_0 = z_2, \; \bar{q}_1 = z_2 + 1, \; \bar{q}_2 = z_2 + 2, \; c(z_2) = z_2.$$

Primul nivel de realizare (în forma standard controlabilă ) este

$$A(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2z_2}{z_2 + 2} & \dfrac{2z_2 + 2}{z_2 + 2} \end{bmatrix}, \; B(z_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; D(z_2) = \left[ \frac{z_2^2}{z_2^2 + 2z_2} \right],$$

$$C(z_2) = \left[ \frac{z_2 + 1}{z_2^2 + 2z_2} \quad \frac{2}{z_2^2 + 2z_2} \right] + \frac{z_2^2}{z_2(z_2 + 2)} \left[ \frac{2z_2}{z_2 + 2} \quad \frac{2z_2 + 2}{z_2 + 2} \right] =$$

$$= \left[ \frac{2z_2^3 + z_2^2 + 2}{z_2^3 + z_2^2 + z_2} \quad \frac{z_2}{z_2^3 + z_2^2 + z} \right].$$

Matricele de transfer

$$\bar{A}(z_2) = \left[\frac{2z_2}{z_2+2} \quad \frac{2z_2+2}{z_2+2}\right], \quad \bar{B}(z_2) = [1] = \left[\frac{z_2+2}{z_2+2}\right],$$

$$\bar{C}(z_2) = \left[\frac{z_2+1}{z_2^2+2z_2} \quad \frac{2}{z_2^2+2z_2}\right], \quad \bar{D}(z_2) = \left[\frac{z_2^2}{z_2^2+2z_2}\right]$$

au realizările

$$\bar{A}A = [1], \quad \bar{A}B = [2\ 1], \qquad \bar{A}C = [1], \quad \bar{A}D = [2\ 2],$$

$$\bar{B}A = [1], \quad \bar{B}B = [0], \qquad \bar{B}C = [1], \quad \bar{B}D = [1],$$

$$\bar{C}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{C}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{C}C = [0\ 1], \ \bar{C}D = [0\ 0],$$

$$\bar{D}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{D}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{D}C = [0\ 1], \ \bar{D}D = [1].$$

Realizarea 2D, de dimensiune $n+2m-k=5$, va fi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \ C = [C_1\ C_2], \ D = DD,$$

unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [2\ 2], \qquad C_2 = [1\ 0\ 1], \qquad D = [1].$$

Într-adevăr, matricea de transfer a acestui sistem este

$$C\left[\begin{pmatrix} z_1 I_2 & 0 \\ 0 & z_2 I_3 \end{pmatrix} - A\right]^{-1} B + D =$$

$$= [2\ 2\ 1\ 0\ 1] \begin{bmatrix} z_1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & z_1+1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & z_2+2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_2+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 =$$

$$= \frac{1}{\Delta} [2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x & (z_2 + 2)(z_2^2 + 2z_2) & x & x & 0 & 0 \\ x & (z_2+2)(z_2^2 z_1 + 2z_2 z_1) & x & x & 0 & 1 \\ x & (z_2+2)(2z_1 z_2 + z_2) & x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & x & x & 0 \\ x & 2z_1 z_2^2 + z_1 z_2 + z_1 + 2 & x & x & z_1^2 z_2^2 + 2z_2 z_1^2 + z_1 z_2^2 + z_1 z_2 + z_2^2 & 1 \end{bmatrix} + 1 =$$

$$= \frac{2z_2^2 + z_2 + 2z_2^2 z_1 + 2z_1 z_2 + 2z_2 + z_2 z_1^2 + 2z_1 + z_2 + 1}{z_2[(z_2+2)z_1^2 + (z_2+1)z_1 + z_2]} + 1 =$$

$$= \frac{z_1^2 z_2^2 + 2z_1 + z_2 + 1}{z_1^2 z_2^2 + 2z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_1 z_2 + z_2^2} = F(z_1 \, z_2),$$

unde $\Delta = \det \left[ \begin{pmatrix} z_1 I_2 & 0 \\ 0 & z_2 I_3 \end{pmatrix} - A \right] = z_2 \, (z_2 + 2) \, [(z_2+2) \, z_1^2 + (z_2+1) \, z_1 + z_2]$.

Scanned with OKEN Scanner

# 3. REPREZENTĂRI DE STARE. CONEXIUNI CU REPREZENTĂRILE POLINOMIALE

## 3.1. Modele de stare

Lucrările prezentate la congresul IFAC din 1984, ținut la Budapesta, dedicate sistemelor discrete 2D, au ca suport teoretic tratarea acestora pe baza reprezentărilor pe stare.

Dat fiind faptul că punctele de vedere ale specialiștilor în domeniu nu coincid, este utilă analiza acestor reprezentări.

În literatura de specialitate, pe plan mondial, au fost propuse trei tipuri de astfel de reprezentări. Astfel în anul 1973, S. Attasi [17] propune pentru sistemele cu o intrare — o ieșire un prim model, în care starea sistemului la momentul $(i+1, j+1)$, depinde numai de valoarea stării la $(i, j+1), (i+1, j)$ și $(i, j)$, rezultînd în final o reprezentare

$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) -$$

$$-A_1 A_2 x(i, j) + Bu(i, j), \tag{3.1}$$

$$y(i, j) = Cx(i, j), \text{ cu } A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

În lucrările [21]—[25] sînt studiate proprietățile unor modele de stare și sînt expuși algoritmi de realizare.

În anul 1975, R. P. Roesser [18] propune un nou model de stare. Acest model tratează vectorul de stare al unui sistem 2D, prin descompunerea sa directă în doi vectori, unul reprezentînd starea orizontală $x^o$, iar celălalt reprezentînd starea verticală $x^v$.

Fie:

- $i$ — un întreg pozitiv, care reprezintă coordonata orizontală;
- $j$ — un întreg pozitiv, care reprezintă coordonata verticală;
- $x^v$ — o mulțime de vectori reali, de dimensiune $m$, care transportă informația pe verticală;
- $x^o$ — o mulțime de vectori reali, de dimensiune $n$, care transportă informația pe orizontală;
- $u$ — o mulțime de vectori reali, de dimensiune $l$, acționînd ca intrări;
- $y$ — o mulțime de vectori reali, de dimensiune $p$, acționînd ca ieșiri.

Sistemul liniar 2D este descris de ansamblul

$$\langle \{x^v\}, \{x^o\}, \{u\}, \{y\}, f, g \rangle,$$

în care

$$f : \{x^v\} \times \{x^o\} \times u \rightarrow \{x^v\} \times \{x^o\},$$

$$g : \{x^v\} \times \{x^o\} \times u \rightarrow \{y\}.$$

Dacă $f$ şi $g$ sînt funcţii liniare, atunci ele pot fi reprezentate:

$$\begin{aligned} x^o(i+1,\ j) &= A_1 x^o(i,\ j) + A_2 x^v(i,\ j) + B_1 u(i,\ j), \\ x^v(i,\ j+1) &= A_3 x^o(i,\ j) + A_4 x^v(i,\ j) + B_2 u(i,\ j), \\ y(i,\ j) &= C_1 x^o(i,\ j) + C_2 x^v(i,\ j)\ ;\ i,\ j \geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ sînt matrice de dimensiuni adecvate. Se observă că $x^o$ se propagă orizontal, iar $x^v$ vertical, prin ecuaţii cu diferenţe, de ordinul 1.

Sistemul (3.2) poate fi scris sub formă compactă astfel:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^o(i+1,\ j) \\ x^v(i,\ j+1) \end{bmatrix} &= Ax(i,\ j) + Bu(i,\ j), \\ y(i,\ j) &= Cx(i,\ j), \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde $$x(i,\ j) = \begin{bmatrix} x^o(i,\ j) \\ x^v(i,\ j) \end{bmatrix}.$$

### 3.1.1. Matricea de tranziţie

Vom nota matricea de tranziţie a stărilor sistemului (3.3) cu $A^{i,j}$.

*Definiţia 3.1.* Fie:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

Se numeşte *matrice de tranziţie* a sistemului (3.3) matricea $A^{i;j}$ definită de relaţiile

(a) $$A^{i;j} = A^{1;0}A^{i-1;j} + A^{0,1}A^{i,\ j-1},\ \text{unde}\ i,\ j > 0, \tag{3.4}$$

$$A^{1;0} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}; \tag{3.5}$$

(b) $$A^{0;0} = I\ (\text{matricea unitate})\ ; \tag{3.6}$$

(c) $$A^{-i;j} = A^{i;-j} = 0,\ \text{pentru}\ i \geqslant 1,\ j \geqslant 1. \tag{3.7}$$



Scanned with OKEN Scanner

*Definiția 3.2.* Se consideră următoarea ordonare a perechilor de întregi de tipul $(i, j)$:

$(h, k) \leqslant (i, j)$, dacă şi numai dacă $h \leqslant i$, $k \leqslant j$,

$(h, k) = (i, j)$, dacă şi numai dacă $h = i$, $k = j$,

$(h, k) < (i, j)$, dacă şi numai dacă $(h, k) \leqslant (i, j)$ şi $(h, k) \neq (i, j)$.

**Lema 3.1.** Fie $u(i, j) = 0$, pentru toţi $(i, j)$ şi condiţiile iniţiale,

$$\left.\begin{aligned} x^o(0, j) &= 0, \\ x^v(i, 0) &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ pentru } (i, j) \neq (0, 0).$$

Atunci: $x(i, j) = A^{i,j}x(0, 0)$.

Demonstraţia se face prin inducţie; astfel,

$$x(0, 0) = A^{0,0}x(0, 0) \quad \text{(vezi (3.6))}$$

şi deci ipoteza este valabilă pentru $(i, j) = (0, 0)$.

Presupunem acum ipoteza valabilă pentru toţi $(h, k)$, astfel încît $(0, 0) \leqslant (h, k) < (i, j)$. Din (3.2) rezultă

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1x^o(i-1, j) + A_2x^v(i-1, j) + B_1 0 \\ A_3x^o(i, j-1) + A_4x^v(i, j-1) + B_2 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i-1, j) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x(i, j-1). \tag{3.8}$$

Pe baza definiţiei 3.1 şi a ipotezei enunţate anterior, (3.8) devine

$$x(i, j) = A^{1,0}A^{i-1,j}x(0, 0) + A^{0,1}A^{i,j-1}x(0, 0) = A^{i,j}x(0, 0).$$

În condiţiile lemei 3.1, fie

a) $x^o(0, j) \neq 0 = x^o(0, k)$, atunci

$$x(i, j) = A^{i,j-k}x(0, k), \text{ cu } x(0, k) = \begin{bmatrix} x^o(0, k) \\ 0 \end{bmatrix};$$

b) $x^v(i, 0) \neq 0 = x^v(h, 0)$, atunci

$$x(i, j) = A^{i-h,j}x(h, 0), \text{ cu } x(h, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(h, 0) \end{bmatrix};$$

c) $u(h, k) \neq 0$, pentru o singură pereche $(h, k) < (i, j)$, atunci

$$x(i, j) = \left( A^{i-h-1,j-k}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-h,j-k-1}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(h, k).$$

Deoarece sistemul (3.2) este spaţial invariant, prin suprapunerea celor trei efecte, se obţine următoarea teoremă.



Scanned with OKEN Scanner

**Teorema 3.1.** Pentru toţi $(i, j) \geqslant (0, 0)$,

$$x(i, j) = \sum_{k=0}^{j} A^{i,j-k} \begin{bmatrix} x^{o}(0, k) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{h=0}^{i} A^{i-h,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^{v}(h, 0) \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant (h,k) < i,j} \sum \left( A^{i-h-1,j-k} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-h,j-k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \cdot u(h, k). \qquad (3.9)$$

Introducînd $x(i, j)$ în $y(i, j)$ (vezi (3.3)), se obţine formula răspunsului general al sistemului,

$$y(i, j) = [c_1 c_2] \left( \sum_{k=0}^{j} A^{i,j-k} \begin{bmatrix} x^{o}(0, k) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{h=0}^{i} A^{i-h,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^{v}(0, k) \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{0 \leqslant (h,k) < (i,j)} \sum \left( A^{i-h-1,j-k} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-h,j-k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(h, k) \right) + Du(i, j).$$

Matricea $A^{i,j}$ are următoarele proprietăţi

1) $A = A^{1,0} + A^{0,1}$ (vezi definiţia 3.1);

2) $A^{i,0} = A^{1,0}A^{i-1,0} + A^{0,1}A^{i,-1} = A^{1,0}A^{i-1,0}$,

$$A^{i,0} = (A^{1,0})^{i} \text{ şi, în mod analog, } A^{j,0} = (A^{0,1})^{j};$$

3) Fie $I = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ şi $I^{1,0} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Atunci,

$$I^{1,0}A = A^{1,0},$$

$$I^{0,1}A = A^{0,1},$$

$$I^{1,0}A^{0,1} = I^{0,1}A^{1,0} = 0.$$

### 3.1.2. Matricea caracteristică

Fie $E$, $L$ doi operatori definiţi astfel:

$$Ex^{o}(i, j) = x^{o}(i + 1, j),$$

$$Lx^{v}(i, j) = x^{v}(i, j + 1). \qquad (3.10)$$

Ecuaţiile de stare (3.8) pot fi scrise sub forma

$$\begin{bmatrix} EI - A_1 & -A_3 \\ -A_3 & LI - A_4 \end{bmatrix} x(i, j) = 0.$$



Scanned with OKEN Scanner

*Definiția 3.3.* Matricea caracteristică a sistemului (3.3) $Cm(A)$ este

$$Cm(A) = \begin{bmatrix} EI - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & LI - A_4 \end{bmatrix} = EI^{1;0} + LI^{0;1} - A. \tag{3.11}$$

Se observă că definiția dată este o extindere a definiției cunoscute (de la sistemele 1D), la sistemele 2D. Ecuația caracteristică a sistemului (3.3) va fi dată de relația

$$|Cm(A)| = 0. \tag{3.12}$$

Dacă în (3.11), operatorii $E$, $L$ se înlocuiesc cu două nedeterminate $x$, $y$, atunci (3.11) devine

$$|Cm(A)| = f(x, y) = 0, \tag{3.13}$$

în care $f(x, y)$ trebuie să fie monică 2D în $x$, $y$ cu grad $n$, în $x$ și grad $m$ în $y$. Deci

$$f(x, y) = \sum_{(0,0)\leq(i,j)\leq(n,m)} \sum a_{i,j}x^i y^j, \text{ cu } a_{n,m} = 1 \tag{3.14}$$

*Definiția 3.4.* Fie $E$, $L$ doi operatori (vezi (3.10)). Atunci

$$A^{i;j} = E^i L^j A = L^j E^i A.$$

**Teorema 3.2.** Orice matrice $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ satisface propria sa ecuație caracteristică [18].

După un an, în 1976, E. Fornasini și G. Marchesini [20] propun un nou model de stare.

În cadrul acestui model, se presupune că starea locală a sistemului la momentul $(i+1, j+1)$ depinde de valoarea stării și a intrării la $(i+1, j)$ și $(i, j+1)$, rezultînd în final o reprezentare de forma $(F/M)$:

$$\begin{cases} x(i+1,\ j+1) = A_1^0 x(i+1, j) + A_2^0 x(i, j+1) + \\ \qquad + B_1^0 u(i+1, j) + B_2^0 u(i, j+1), \\ y(i, j) = C^0 x(i, j). \end{cases} \tag{3.15}$$

Modelul Attassi dă posibilitatea realizării unei funcții de transfer raționale 2D avînd numitorul separabil, adică astfel încît o asemenea funcție poate fi scrisă

$$H(z_1, z_2) = \frac{a(z_1, z_2)}{b(z_1, z_2)}, \tag{3.16}$$

$a(z_1, z_2)$, $b(z_1, z_2)$ fiind polinoame în două nedeterminate $(z_1^{-1}, z_2^{-1})$, iar

$$b(z_1, z_2) = b_1(z_1)\, b_2(z_2). \tag{3.17}$$

Restricția impusă,

$$A_1 A_2 = A_2 A_1, \tag{3.18}$$

simplifică foarte mult studiul comportării în regim dinamic al sistemului, dar pe de altă parte restrînge şi clasa transformărilor intrare-ieşire, capabile de a fi analizate, pe baza acestui model.

Celelalte două modele, pe de altă parte, conduc la funcţii de transfer raţionale 2D, care însă nu restrîng gradul de generalitate al modelelor respective.

Aşa cum s-a menţionat, modelele $R$ şi modelele $(F/M)$ acoperă întreaga clasă de funcţii de transfer raţionale proprii 2D.

Analizînd mai atent structura modelelor în discuţie, se poate vedea că vectorul general de stare din modelul $R$,

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$$

are următoarea evoluţie (dedusă din ecuaţiile (3.2) prin înlocuirea lui $j$ cu $j+1$, respectiv a lui $i$ cu $i+1$):

$$x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1), \tag{3.19}$$

iar

$$y(i, j) = [C_1\ C_2]\, x(i, j). \tag{3.20}$$

Dacă se notează

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad A_2^0 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

$$B_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_2^0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sistemul (3.19)—(3.20) devine

$$x(i+1, j+1) = A_1^0 x(i+1, j) + A_2^0 x(i, j+1) +$$

$$+ B_0^1 u(i+1, j) + B_2^0 u(i, j+1), \tag{3.22}$$

$$y(i, j) = [C_1\ C_2]\, x(i, j).$$

Este evident că (3.22) este modelul de stare $F/M$. Trebuie remarcat însă că, în general, regăsirea modelului $F/M$, în modelul $R$, nu poate fi făcută fără a creşte dimensiunea vectorului de stare $x(h, k)$. Aplicînd transformatele $z$ 2D şi presupunînd condiţii iniţiale nule pentru modelul $F/M$ (3.22), se obţine o funcţie de transfer de forma

$$H(z_1, z_2) = C(z_1 z_2 I - A_1^0 z_1 - A_2^0 z_2)^{-1} (B_1^0 z_1 + B_2^0 z_2) =$$

$$= C(I - A_1 z_2^{-1} - A_2 z_1^{-1})^{-1} (B_1 z_2^{-1} + B_1 z_2^{-1}), \tag{3.23}$$

în care
$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}; \quad A_2^0 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad B_2^0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [C_1, C_2] \tag{3.24}$$

și
$$A \triangleq A_1^0 + A_2^0 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}; \quad B \triangleq B_1^0 + B_2^0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Din (3.25) rezultă că forma generală a funcției de transfer va fi

$$H(z_1, z_2) = C\left[\begin{bmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{bmatrix} - A\right]^{-1} B, \tag{3.26}$$

$I_1$, $I_2$ fiind matrice de dimensiuni adecvate (fig. 3.1.)

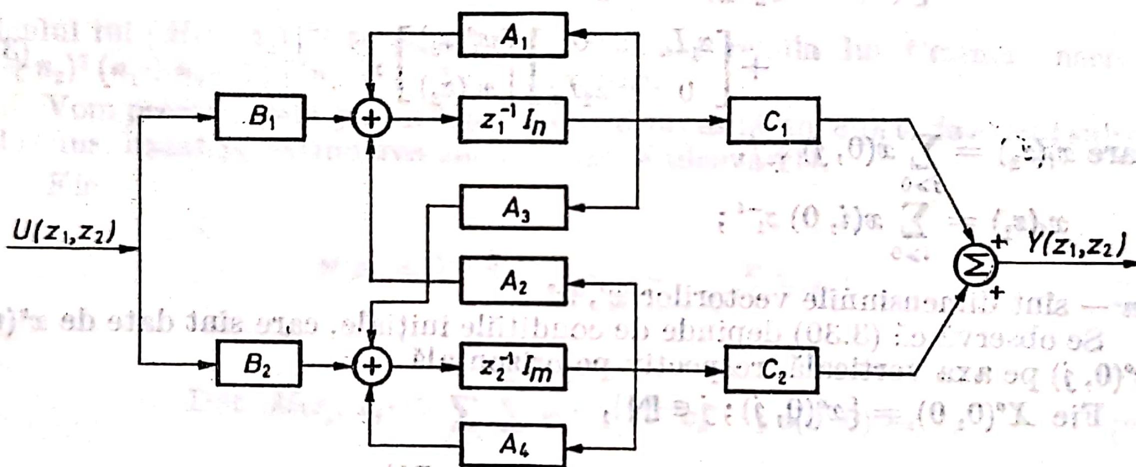



Fig. 3.1.

Aplicînd transformatele $z$ 2D, modelului $R$, se observă imediat că se obține o funcție de transfer identică cu (3.26), ceea ce justifică afirmația că ambele modele acoperă aceeași clasă de functii de transfer raționale 2D.

Modelele de stare analizate au fost propuse de autori, în ideea prelungirii teoriei sistemelor liniare discrete 1D, la sistemele discrete 2D. Ca atare, în ambele cazuri, au fost definite, conform teoriei clasice, conceptele de controlabilitate și obser vabilitate.

Urmărind teoria sistemelor liniare 1D, aceste concepte au fost introduse atît sub forma geometrică, cît și pe baza matricelor polinomiale (exploatînd noțiunile de coprimitate). Dar, spre deosebire de sistemele 1D, unde ambele formulări sînt echivalente, în cazul sistemelor discrete 2D, această coincidență nu este posibilă decît în anumite cazuri.

Pentru a exemplifica afirmația anterioară, vom utiliza modelul Roesser, care, la ora actuală, este cel mai utilizat de către specialiștii în teoria sistemelor 2D.



Scanned with OKEN Scanner

## 3.2. Transformate $z$ 2D ale modelelor de stare

Apelînd la definiția transformatelor $z$ 2D (v. cap. 2) transformatele $z$ ale șirurilor $x(i, j)$ pot fi calculate astfel:

$$\mathscr{Z}\{x(i,j)\} = X(z_1, z_2) = \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} x(i,j) z_1^{-i} z_2^{-j}, \tag{3.27}$$

$$\mathscr{Z}\{x(i+1,j)\} = \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} x(i+1,j) z_1^{-i} z_2^{-j} = z_1(X(z_1,z_2) - \sum_{j\geq 0} x(0,j) z_2^{-j}), \tag{3.28}$$

$$\mathscr{Z}\{x(i,j+1)\} = z_2(X(z_1,z_2) - \sum_{i\geq 0} x(i,0) z_1^{-i}). \tag{3.29}$$

*Observație.* S-au aplicat transformările $z$ de tipul (*).

Sistemul (3.2) devine, atunci

$$\left[\begin{pmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{pmatrix} - A\right] \cdot x(z_1, z_2) = Bu(z_1, z_2) + \\ + \begin{bmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^o(z_2) \\ x_i^v(z_2) \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

în care $x_i(z_2) = \sum_{j\geq 0} x(0,j) z_2^{-j}$,

$x_j(z_1) = \sum_{i\geq 0} x(i,0) z_1^{-i}$;

$n, m$ — sînt dimensiunile vectorilor $x^o, x^v$.

Se observă că (3.30) depinde de condițiile inițiale, care sînt date de $x^v(i, 0)$ și $x^o(0, j)$ pe axa verticală, respectiv pe orizontală.

Fie $X^o(0,0) = \{x^o(0,j)\,;\, j \in \mathbb{N}\}$,

$$X^v(0,0) = \{x^v(i,0)\,;\, i \in \mathbb{N}\}.$$

Se observă că $X^o(0, 0)$ aparține lui $X^o$ — spațiul șirurilor de vectori $n$-dimensionali, iar $X^v(0, 0)$ aparține lui $X^v$ — spațiul șirurilor de vectori $m$-dimensionali. Rezultă că

$$X(0,0) = \{X^o(0,0)\,;\, X^v(0,0)\} \in X = X^o \times X^v,$$

în care $X$ reprezintă spațiul stărilor globale ale sistemului 2D. Acesta este infinit dimensional, iar $X(0, 0)$ reprezintă condiția inițială necesară propagării stărilor.

Vom considera două tipuri de condiții inițiale:

a) condiție inițială locală,

$$X(0,0) = x \in \mathbb{R}^{n+m},\ x^o(0,j) = x^v(i,0) = 0, \text{ pentru } i, j \geq 0;$$

b) condiție inițială globală,

$$X(0,0) = \Xi \in X.$$

Dacă în (3.30) condiţiile iniţiale locale sînt nule, rezultă funcţia de transfer a sistemului,

$$H^*(z_1, z_2) = C\left[\begin{pmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{pmatrix} - A\right]^{-1} B, \qquad (3.31)$$

care are o reprezentare de forma din figura 3.1.

Concluzia care se poate trage este că modelul Roesser poate fi pus într-o corespondenţă biunivocă cu o funcţie de transfer de tipul $H^*$ (avînd în componenţă elemente de întîrziere de tipul $z_1^{-1}$, $z_2^{-1}$; $z_1^{-1}$ reprezintă o întîrziere cu un pas pe axa orizontală, iar $z_2^{-1}$ acelaşi lucru pe axa verticală).

În (3.31) notăm

$$[M(z_1, z_2)]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{pmatrix} - A\right]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 I_n - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I_m - A_4 \end{bmatrix}. \qquad (3.32)$$

Calculul lui $[M(z_1, z_2)]^{-1}$ se poate face utilizînd regula lui Cramer, necesitînd $(n_1+n_2)^2 (n_1+n_2-1) [(n_1+n_2-1)!]$ înmulţiri.

Vom prezenta mai jos un algoritm care necesită un efort de calcul substanţial redus, bazat pe extinderea algoritmului Fadeeva 1D.

Fie

$$[M(z_1, z_2)]^{-1} \triangleq \frac{1}{\text{Det } M(z_1, z_2)} E(z_1, z_2), \qquad (3.33)$$

cu

$$\text{Det } M(z_1, z_2) \triangleq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a(i, j) z_1^{n-i} z_2^{m-j}; \; a(0, 0) = 1, \qquad (3.34)$$

$$E(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} F(i, j) z_1^{n-i} z_2^{m-j}; \; F(0, 0) = 0;$$

$a(i, j)$ — scalar, $E(z_1, z_2)$ — matrice polinomială de ordinul $(n+m) \times (n+m)$ (adjuncta matricei $M$), $F(i, j)$ — matrice constantă $p \times p$; $(p = n + m)$.

Fie

$$E(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} E_1(z_1, z_2) & E_2(z_1, z_2) \\ E_3(z_1, z_2) & E_4(z_1, z_2) \end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

şi

$$E^{1;0}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} E_1(z_1, z_2) & E_2(z_1, z_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.36)$$

$$E^{0;1}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_3(z_1, z_2) & E_4(z_1, z_2) \end{bmatrix}. \qquad (3.37)$$

Cu notațiile de mai sus se poate demonstra imediat (utilizînd aceeași metodologie ca în cazul 1D — vezi, de exemplu [26])

$$\frac{\partial \operatorname{Det} M(z_1, z_2)}{\partial z_1} = \operatorname{tr}\,[E^{1;0}(z_1, z_2)], \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Det} M(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \operatorname{tr}\,[E^{0;1}(z_1, z_2)], \tag{3.39}$$

în care prin „tr" am specificat „urma" matricelor respective.

Substituind (3.34) în (3.38), (3.39) și egalînd coeficienții produselor de tipul $z_1^i\, z_2^j$, se obține

$$[n - (i-1)]\, a(i-1, j) = \operatorname{tr}[F^{1;0}(i, j)], \tag{3.40}$$

$$[m - (j-1)]\, a(i, j-1) = \operatorname{tr}\,[F^{0;1}(i, j)], \tag{3.41}$$

în care $F^{1,0}$ și $F^{0,1}$ sînt partiționările lui $F(i, j)$, similare cu (3.36) și (3.37).

Introducînd (3.34) în (3.33) și procedînd ca mai sus,

$$F^{0;1}(i, j+1) + F^{1,0}(i+1, j) = AF(i, j) + a\,(i, j)\, I, \tag{3.42}$$

$$i = \overline{0, n} \qquad \text{și} \qquad j = \overline{0, m} \qquad \left.\begin{matrix} a(i,j) = 0 \\ F(i,j) = 0 \end{matrix}\right\} \text{pentru } 0 < i > n \text{ sau } 0 < j > m.$$

De asemenea, $F^{0;1}(i, 0) = 0,\ i = \overline{0, n}$

și

$$F^{1;0}(0, j) = 0,\ j = \overline{0, m},$$

(3.41) devine

$$\operatorname{tr}\,[F^{0,1}(i, j+1)] + \operatorname{tr}\,[F^{1,0}(i+1, j)] = \operatorname{tr}[AF(i, j)] +$$
$$+ (n+m)\, a(i, j) \tag{3.43}$$

sau

$$(m-j)\, a(i, j) + (n-i)\, a(i, j) = \operatorname{tr}[AF(i, j)] + (n+m)\, a(i, j). \tag{3.44}$$

Deci:

$$\underset{(i+j\neq 0)}{a(i, j)} = -(i+j)^{-1} \operatorname{tr}\,[AF(i, j]), \tag{3.45}$$
$$a(0, 0) = 1.$$

Algoritmul poate fi implementat ușor pe un calculator numeric și necesită $(n + m^3)\,(n+1)\, m$ înmulțiri.

În cele ce urmează se prezintă posibilitatea determinării funcției de transfer a unui sistem 2D, pe baza matricei de tranziție a stărilor și a polinomului caracteristic, fapt care permite o interpretare directă și imediată a legăturii

dintre funcţia de transfer şi ecuaţiile cu diferenţe finite (3.2), care determină funcţionarea sistemului 2D.

Fie sistemul liniar şi invariant 2D, descris de (3.3) şi transformata $z$ 2D a lui (3.3), dată de (3.30). Rezultă deci că

$$H^*(z_1, z_2) = C\left[\begin{array}{c|c} z_1 I_n - A_1 & -A_2 \\ \hline -A_3 & z_2 I_m - A_4 \end{array}\right]^{-1} B. \quad (3.46)$$

Notăm $S = \begin{bmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{bmatrix}$; (3.46) devine:

$$H^*(z_1, z_2) = C[S-A]^{-1}B.$$

Fie

$$[S - A]^{-1} = \frac{P(z_1, z_2)}{q(z_1, z_2)}, \text{ în care}$$

$$P(z_1, z_2) = \text{adj}\,(S - A) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} z_1^i z_2^j, \quad P_{n,m} = 0, \quad (3.47)$$

$$q(z_1, z_2) = |S-A| = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} q_{i,j} z_1^i z_2^j, \quad q_{n,m} = 1.$$

Algoritmul propus anterior poate fi rezumat astfel. Fie relaţia (3.42), transcrisă cu noile notaţii (3.47),

$$P_{i,j-1}^{0,1} + P_{i-1,j}^{1,0} = AP_{i,j} + q_{i,j}I, \quad (3.48)$$

în care (vezi (3.45))

$$q_{i,j} = \frac{1}{n+m-i-j}\,\text{tr}[AP_{i,j}]; \quad i+j \neq n+m, \quad (3.49)$$

condiţiile iniţiale sînt

$$q_{n,m} = 1; \; P_{n,m} = 0,$$

$$P_{n-1,m} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P_{n,m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Condiţiile la „limită" sînt

$$P_{i,m}^{0,1} = 0; \; i = 0, 1, \ldots, n, \quad (3.51)$$

$$P_{n,j}^{1,0} = 0; \; j = 0, 1, \ldots, m,$$

cu condiţia finală

$$AP_{0,0} + q_{0,0}I = 0. \quad (3.52)$$



Scanned with OKEN Scanner

Algoritmul pornește de la $i = n, j = m$ și se termină pentru $i = 0, j = 0$.
Partiționarea lui $P(z_1, z_2)$ a fost considerată :

$$P(z_1, z_2) = \left[\begin{array}{cc} P_1(z_1, z_2) & P_2(z_1, z_2) \\ \hline P_3(z_1, z_2) & P_4(z_1, z_2) \end{array}\right]$$

și

$$P^{1;0}(z_1, z_2) = \left[\begin{array}{cc} P_1(z_1, z_2) & P_2(z_1, z_2) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$P^{0;1}(z_1, z_2) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline P_3(z_1, z_2) & P_4(z_1, z_2) \end{array}\right],$$

în care dimensiunile matricelor sînt

$$P_1 - n\times n;\; P_2 - n\times m;\; P_3 - m\times n;\; P_4 - m\times m.$$

În cele ce urmează, considerăm pentru expresia (3.48) următoarea formă :

$$P_{i,j} = \left[\begin{array}{c} [AP_{i+1,j}] \qquad + q_{i,j}I^{10} \\ \hline [AP_{i,j+1}] \qquad + q_{i,j+1}I^{01} \end{array}\right]. \tag{3.53}$$

Folosind (3.53) și calculînd $P_{i,j}$ recurent,

$$P_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-i}\sum_{l=0}^{m-j} q_{i+k,j+l}\left[\begin{array}{c|c} A_1^{k-1,l} & A_2^{k,l-1} \\ \hline A_3^{k-1,l} & A_4^{k,l-1} \end{array}\right], \tag{3.54}$$

în care partiționarea $A^{i;j}$ a fost considerată :

$$A^{i;j} = \left[\begin{array}{cc} A_1^{ij} & A_2^{ij} \\ \hline A_3^{ij} & A_4^{ij} \end{array}\right]\begin{array}{c} n \\ m \end{array}.$$

Introducînd (3.54) în (3.47),

$$P(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}\left(\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{m-1} q_{i+k,j+l} z_1^i z_2^j \cdot \left[\begin{array}{cc} A_1^{k-1,l} & A_2^{k,l-1} \\ \hline A_3^{k-1,l} & A_4^{k,l-1} \end{array}\right]\right). \tag{3.55}$$

Dar :

$$\begin{bmatrix} A_1^{k-1,l} & A_2^{k,l-1} \\ A_3^{k-1,l} & A_4^{k,l-1} \end{bmatrix} B = A^{k-1;l}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{k;l-1}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{3.56}$$

$$k = \overline{0, n};\; l = \overline{0, m};$$

Dacă se introduce (3.55) în expresia funcției de transfer $H^*(z_1, z_2)$ și se ține seama de (3.56), se obține o relație care dă valoarea lui $H^*(z_1, z_2)$ în funcție de matricea de tranziție $A^{i,j}$ a sistemului 2D, și de polinomul caracteristic $q(z_1, z_2)$.

## 3.3. Controlabilitate și observabilitate

### 3.3.1. Definirea proprietăților de controlabilitate și observabilitate

*Definiția 3.5.* Sistemul (3.3) este *local controlabil*, dacă pentru condiția inițială $X(0, 0) = 0$ și $\xi$ un vector arbitrar $(n + m)$ există $N$, $M > 0$ și o secvență de intrare $u(i, j)$, $(0, 0) \leqslant (i, j) < (N, M)$, astfel încît $x(N, M) = \xi$. Sistemul (3.3) este *local observabil*, dacă nu există nici o condiție inițială locală nenulă, $X$ astfel încît pentru șirul de intrare nul $u(i, j) = 0$, $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, ieșirea să fie $y(i, j) \equiv 0$, $i \geqslant 0, j \geqslant 0$.

Pe baza definițiilor de mai sus, și ținînd seama de (3.9) și de teorema 3.2 rezultă (prin extindere de la sistemele 1D):

**Teorema 3.3.** Sistemul (3.3) este local controlabil, dacă și numai dacă matricea de controlabilitate

$$\mathcal{C} = [\overbrace{M(1, 0)\ M(0, 1) \ldots M(i, j) \ldots M(n, m)}^{n+m}] \tag{3.57}$$

(unde $(0,0) < i, j \leqslant (n, m)$) este de rang maxim, în care

$$M(i, j) = A^{i-1,j}B^{1,0} + A^{i,j-1}B^{0,1},$$

$$B^{1,0} = B_1; \quad B^{0,1} = B_2.$$

**Teorema 3.4.** Sistemul (3.3) este *local observabil*, dacă și numai dacă matricea de observabilitate

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ C\,A^{i,j} \\ \vdots \\ C\,A^{n,m-1} \\ \vdots \\ C\,A^{n-1,m} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ m \\ \\ \\ m \\ \\ \end{matrix} \tag{3.58}$$

(unde $(0,0) \leqslant (i, j) \leqslant (n, m)$) este de rang maxim.

*Observație*: Trebuie remarcat aspectul foarte important că, spre deosebire de cazul sistemelor 1D, la care există o implicație bine stabilită între controlabilitate, observabilitate și minimalitate, extinderea naturală a noțiunilor de controlabilitate și observabilitate locală în cazul 2D (cazul definiției 3.5) nu mai păstrează această implicație. Altfel spus, o realizare a unui sistem 2D, local observabilă și controlabilă, nu este neapărat și minimală. Pentru demonstrație, să considerăm exemplul funcției de transfer,

$$H(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 - 1},$$

care admite două realizări $A$, $B$, $C$,

$$\text{a)} \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ x_1^v \\ x_2^v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x^o \\ x_1^v \\ x_2^v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u,$$

$$y = \underbrace{[-1, 1, 0]}_{C} \begin{bmatrix} x^o \\ x_1^v \\ x_2^v \end{bmatrix};$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ x^v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x^o \\ x^v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u, \quad y = \underbrace{[1, 1]}_{C} \begin{bmatrix} x^o \\ x^v \end{bmatrix}.$$

Este ușor de demonstrat că în primul caz realizarea $A$, $B$, $C$ este local controlabilă și observabilă, dar are dimensiunea mai mare decît în cazul al doilea.

În cazul în care condițiile teoremelor 3.3, 3.4 nu sînt respectate, problema care apare în mod natural este aceea de a reduce sistemul (3.3) la un sistem observabil și controlabil.

Procedura propusă de Roesser este următoarea.

Se partiționează $\mathcal{O}$ în $\mathcal{O} = [O_1, O_2]$, $O_1$ cuprinzînd primele $n$ coloane din $\mathcal{O}$, iar $O_2$ ultimele $m$ coloane. Modelul redus poate fi format utilizînd clasele de echivalență ale stărilor $\{x^o\}$ modulo spațiul nul al lui $O_1$, ca noile stări pe orizontală, și clasele de echivalență ale stărilor $\{x^v\}$ modulo spațiul nul al lui $O_2$, ca noile stări pe verticală.

Deci se găsesc mai întîi reprezentările vectoriale corespunzătoare claselor de echivalență amintite, și apoi matricele care caracterizează sistemul (3.3) sînt modificate, astfel încît comportarea intrare-ieșire a sistemului să fie aceeași. $O_1$, $O_2$ pot fi reduse, astfel încît noile dimensiuni să îndeplinească condițiile de rang maxim. Aceasta se poate face construind matricele $T_1$, respectiv $T_2$, din prima mulțime completă de linii liniar independente a lui $O_1$, respectiv $O_2$. Este introdusă astfel o transformare

$$T^o = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \tag{3.59}$$

astfel încît

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^o \\ \hat{x}^v \end{bmatrix} = T^o \begin{bmatrix} x^o \\ x^v \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

unde $\hat{x}^o$, $\hat{x}^v$ sînt stările modelului observabil de ordin redus. Comportarea intrare-ieșire a sistemului (3.3) este menținută, dacă pentru sistemul de ordin redus se adoptă matricele:

$$\hat{B} = T^o B, \hat{A} = T^o A T, \quad \hat{C} = CT, \tag{3.61}$$

unde $T$ este inversa la dreapta a matricei $T$ (deci $T^o T = I$).

Se cuvine de făcut o remarcă și anume, faptul că referitor la teorema 3.3, există posibilitatea unei ambiguități în determinarea matricei $T$, în sensul că dacă sistemul are o stare neobservabilă $\varphi$, atunci $\varphi \in \text{Ker}\,\Theta$ și ea poate fi reprezentată :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}.$$

În cazul controlabilității, modelul redus este obținut prin aceeași logică, pe baza unei transformări

$$T^v = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix},$$

$L_1$, $L_2$ formate din primele coloane liniar independente ale lui $C_1$, respectiv $C_2$; $C_1$, $C_2$ obținute prin partiționarea matricei

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}.$$

Rezultă

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^o \\ \hat{x}^v \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x^o \\ x^v \end{bmatrix}, \tag{3.62}$$

unde $L$ este o inversă la stînga a matricei $T^v$, adică $LT^v = I$.

Modul în care au fost definite matricele $T^o$ și $T^v$, precum și posibilitatea apariției unei ambiguități în ceea ce privește localizarea stărilor neobservabile și necontrolabile, impune o reformulare a teoremelor 3.3 și 3.4, bazată pe partiționarea matricelor $\mathcal{C}$ și $\Theta$, ca în (3.63), (3.64),

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C^o_{n,m} \\ C^v_{n,m} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}, \tag{3.63}$$

$$\Theta = [O^o_{n,m} \quad O^v_{n,m}]. \tag{3.64}$$

**Teorema 3.5.** $x^o$, $x^v$ — sînt separat local controlabile, dacă și numai dacă $C^o_{n,m}$, respectiv $C^v_{n,m}$ sînt fiecare de rang maxim.

**Teorema 3.6.** $x^o$, $x^v$ sînt separat local observabile, dacă și numai dacă $O^o_{n,m}$, respectiv $O^v_{n,m}$ sînt fiecare de rang maxim.

În afara avantajelor menționate anterior, teoremele 3.5, 3.6 conduc la o descompunere a stărilor orizontale și verticale. De asemenea, se poate demonstra, prin exemple, că un sistem minimal are stările orizontale și verticale separat controlabile și observabile.

Se poate realiza o legătură între noțiunea de minimalitate și controlabilitate-observabilitate, dacă se recurge la definirea ultimelor două pe baza condițiilor de minimalitate a realizărilor sistemelor 2D. Acest lucru se poate face, dacă se apelează la definirea controlabilității și observabilității pe baza conceptelor de coprimitate (vezi definiția 1.25) a matricelor $A$, $B$, $C$ (așa cum se poate proceda și în cazul sistemelor 1D).

*Definiția 3.6.* Fie

$$H(z_1, z_2) = VT^{-1}U,$$

unde $V, T, U$ sînt matrice polinomiale 2D. $V, T, U$ reprezintă o descriere minimală a lui $H(z_1, z_2)$, dacă și numai dacă

$V, T$ sînt coprime la dreapta,

$T, U$ sînt coprime la stînga

(definiția provine din generalizarea teoremelor demonstrate de Rosenbrock pentru sistemele 1D). Altfel spus: $C, A, B$ reprezintă o descriere minimală a sistemului (3.3), dacă și numai dacă matricele

$$M = \left[\begin{pmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{pmatrix} - A\right], \quad B \text{ sînt coprime la stînga} \tag{3.65}$$

și

$$C, M = \left[\begin{pmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{pmatrix} - A\right] \quad \text{sînt coprime la dreapta.} \tag{3.66}$$

*Definiția 3.7.* a) Dacă este îndeplinită (3.65), perechea $A, B$ se numește *modal controlabilă*;

b) perechea $C, A$ este *modal observabilă*, dacă este îndeplinită relația (3.66).

În aceste condiții este evident că un sistem de tipul (3.3) care este modal controlabil și modal observabil este minimal.

Ținînd seama de algoritmul de realizare la două nivele, prezentat în capitolul 2, pe baza formulelor (2.78), rezultă modelul de stare generalizat,

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} x(k+1, h) \\ a(k, h+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD & AC \\ AB & AA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, h) \\ a(k, h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BD \\ 0 \end{bmatrix} u(k, h), \\ c(k, h+1) = CAc(k, h) + CBx(k, h), \\ y(k, h) = CDx(k, h) + CCc(k, h), \end{gathered} \tag{3.67}$$

cu $AD \to n \times n$; $AA \to m \times m$; $CA \to m \times m$.

Matricea $\begin{bmatrix} AD & AC \\ AB & AA \end{bmatrix}$ $(n+m) \times (n+m)$ reprezintă dinamica sistemului în două direcții, iar $CA$ $(m \times m)$ reprezintă dinamica într-o singură direcție.

Modelul de stare Roesser se poate regăsi dacă se consideră: $x(k, h) = x^0(k, h)$, $A_1 = AD$,

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} a_{kh} \\ b_{kh} \\ c_{kh} \\ d_{kh} \end{bmatrix} = x^v(k, h), \quad A_2 = [AC \quad BC \quad 0 \quad 0], \quad A_3^T = [AB \quad 0 \quad CB \quad 0], \\ A_4 = \begin{bmatrix} AA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & BA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & CA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & DA \end{bmatrix}, \\ B_1 = BD, \\ B_2^T = [0 \quad BB \quad 0 \quad DB], \\ C_1 = CD; \; C_2 = [0, \; 0, \; CC, \; DC]. \end{gathered} \tag{3.68}$$

Definirea modelului de stare generalizat permite testarea condițiilor de controlabilitate (observabilitate) modală, pe baza matricelor raționale.

Matricea de transfer a sistemului (3.2) este

$$H(z_1, z_2) = [C_1, C_2] \begin{bmatrix} z_2 I - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Aceeași funcție de transfer poate fi scrisă (2.66)

$$H(z_1, z_2) = C(z_2)\,[z_1 I - A(z_2)]^{-1}\, B(z_2) + D(z_2),$$

cu $A(z_2)$, $B(z_2)$, $D(z_2)$, $C(z_2)$ date de tipul (2.68).

**Teorema 3.7.** Sistemul (3.2) este modal controlabil, dacă și numai dacă:

a) $[A_1 + A_2(z_1 I - A_4)^{-1} A_3], [B_1 + A_2(z_1 I - A_4)^{-1} B_2]$ (3.69)

este o pereche controlabilă în raport cu $\mathbb{R}(z_1)$;

b) $[A_4 + A_3(z_2 I - A_1)^{-1} A_2], [B_2 + A_3(z_2 I - A_1)^{-1} B_1]$ (3.70)

este o pereche controlabiă în raport cu $\mathbb{R}(z_2)$.

*Demonstrație.* Ținînd seama de (2.71),

$$\begin{bmatrix} z_1 I - A_1 & A_2 & B_1 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 & B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & -A_2 \\ 0 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 I - A(z_2) & 0 & B(z_2) \\ -(z_2 I - A_4)^{-1} A_3 & I & (z_2 I - A_4)^{-1} B_2 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Dacă $z_1 I - A(z_2)$ și $B(z_2)$ au un factor comun la stînga, atunci este clar că

$$\begin{bmatrix} z_1 I - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 I - A_4 \end{bmatrix} \text{ și } \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

nu sînt coprime pe $\mathbb{R}(z_2)\,[z_1]$ și deci sistemul nu este modal controlabil. Neîndeplinirea proprietății b) conduce la același rezultat. Rezultă că necesitatea condițiilor a), b) este demonstrată.

Suficiența poate fi demonstrată, dacă se ține seama că în condițiile în care a) nu este îndeplinită există matricele $L, Q \in \mathbb{R}(z_2)\,[z_1]$, astfel încît

$$[z_1 I - A(z_2)]\, L + B(z_2)\, Q = I,$$

ceea ce implică coprimitatea matricelor (3.72).

Observabilitatea modală se obține prin dualitate.

**Teorema 3.8.** Sistemul (3.2) este modal observabil, dacă și numai dacă:

1) $C_1 + C_2(z_1 I - A_4)^{-1} A_3,\ A_1 + A_2(z_2 I - A_4)^{-1} A_3$ (3.73)

este o pereche observabilă în raport cu $\mathbb{R}(z_1)$;

$$2)\ C_2 + C_1(z_2 I - A_1)^{-1},\ A_4 + A_3(z_2 I - A_1)^{-1} A_2 \tag{3.74}$$

este o pereche observabilă în raport cu $\mathbb{R}(z_2)$.

### 3.3.2. Posibilități de stabilizare a sistemelor 2D

Vom analiza această problemă în cazul general al matricelor de transfer.

*Stabilitatea intrare-ieșire* a sistemelor de forma (2.60) implică, conform teoremelor de stabilitate (Shanks), ca $b(z_1, z_2) \neq 0$ în zonele de stabilitate necesare din planul $z_1$, $z_2$ unde $b(z_1, z_2)$ este c.m.m.m.c. al numitorilor elementelor matricei $H(z_1, z_2)$, cu $H(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{p\times m}(z_1, z_2)$.

Dacă se factorizează,

$$b(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{n} b_j(z_2)\, z_1^j, \tag{3.75}$$

rezultă că pentru stabilitate este necesar ca $b_n(z_2)$ să fie stabil ($b_n(z_2) \neq 0$, în zonele necesare din planul $z_2$).

Luînd în considerare modul de realizare al sistemului 2D, descris printr-o funcție de transfer $H(z_1, z_2)$, asigurarea condițiilor de stabilitate se poate face considerînd că $A(z_2)$, $B(z_2)$, $C(z_2)$, $D(z_2)$ sînt matrice cu elemente în inelul funcțiilor de transfer stabile,

$$Rs = \left\{ \frac{a(z_2)}{b(z_2)} \,\middle|\, b(z_2) \neq 0, \text{ pentru } |z_2| \geqslant 1 \right\}, \tag{3.76}$$

unde $a(z_2)$, $b(z_2)$ sînt polinoame cu coeficienți reali în $z_2$ (se poate demonstra [28] că $Rs$ este un subinel al lui $R^{pr}(z_1)$).

Practic acest lucru se face în felul următor.

Fie $H(z_1, z_2)$ adus la forma

$$H(z_1, z_2) = \frac{P_1(z_1, z_2)}{r_1(z_1, z_2)}, \quad \text{unde } P_1(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{n} P_{1j}(z_2)\, z_1^j \ \text{ și } \ r_1 = \sum_{j=0}^{n} b_j(z_2)\, z_1^j.$$

Presupunem $b_n(z_2) \neq 0$, pentru $|z_2| \geqslant 1$. Atunci

$$H(z_1, z_2) = \frac{P_1/b_n(z_1)}{r_1/b_n(z_1)}. \tag{3.77}$$

Din (3.77) rezultă că $H(z_1, z_2)$ este o matrice avînd ca elemente funcții raționale proprii în $z_2$, cu coeficienții în $Rs$.

Realizarea la primul nivel a lui $H(z_1, z_2)$ oferă matricele

$$A(z_2) \in Rs^{n\times m};\ B(z_2) \in Rs^{n\times m};\ C(z_2) \in Rs^{p\times n};$$

$D(z_2) \in Rs^{p\times m}$ (realizare minimală), cu dinamica dată de ecuațiile

$$X_{k+1}(z_2) = A(z_2)\, X_k(z_2) + B(z_2)\, U_k(z_2),$$

$$Y_k(z_2) = C(z_2)\, X_k(z_2) + D(z_2)\, U_k(z_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom apela în continuare la o teoremă stabilită de E. D. Sontag [28].

**Teorema 3.9.** Fie $R$ un inel integru şi $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ o pereche accesibilă. Atunci pentru orice $p_1, \ldots, p_n \in R$ există $K \in R^{m\times n}$, astfel încît

$$\det|zI - A + BK| = (z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n). \tag{3.78}$$

Fie $A(z_2)$, $B(z_2)$, $C(z_2)$, $D(z_2)$ primul nivel de realizare a lui $H(z_1, z_2)$ pe $Rs$. Dacă alegem $p_1, \ldots, p_n \in Rs$, astfel încît $(z_1 - p_1)(z_1 - p_2)\ldots(z_1 - p_n)$ să fie stabil, atunci, pe baza teoremei 3.9, rezultă că există un $K(z_2) \in Rs^{m\times n}$, astfel încît

$$\det|z_1 I - A(z_2) + B(z_2)K(z_2)| = (z_1 - p_1)(z_1 - p_2)\ldots(z_1 - p_n). \tag{3.79}$$

Din (3.79) rezultă că putem stabiliza un sistem 2D, printr-o lege de reacţie de tipul

$$\bar{u}_k(z_2) = -K(z_2)\bar{x}_k(z_2).$$

*Observaţie*. În (3.79) $p_i$ poate fi constant, $K(z_2)$ poate fi realizată (considerînd condiţia iniţială zero) de sistemul 1D:

$$\begin{aligned} l(k, h+1) &= KAl(k, h) + KBx(h, k),\\ U(h, k) &= -KCl(k, h) - KDx(k, h). \end{aligned} \tag{3.80}$$

În (3.80) $KA$ este stabilă, deoarece $K(z_2) \in R_s^{m\times n}$.

Procedura de stabilizare prezentată necesită testarea condiţiilor de accesibilitate pentru perechea $A(z_2)$, $B(z_2)$ (conform teoremei 3.9). Accesibilitatea poate fi testată pe baza teoremelor din [28] şi [29].

**Teorema 3.10.** Perechea $A(z_2)$, $B(z_2)$ este accesibilă, dacă şi numai dacă matricea

$$[B(z_2)\ A(z_2)\ B(z_2)\ \ldots,\ A^{n-1}(z_2)\ B(z_2)] \text{ are rangul } n \tag{3.81}$$

pentru toţi $|z_2| \geqslant 1$ şi $|z_2| \to \infty$.

**Teorema 3.11.** Perechea $A(z_2)$, $B(z_2)$ este accesibilă, dacă şi numai dacă $(AD, BD)$ este o pereche accesibilă.

**Teorema 3.12.** Dacă perechea $A(z_2)$, $B(z_2)$ este accesibilă, atunci

$$\begin{bmatrix} z_1 I - AD & -AC & -BC \\ -AB & z_2 I - AA & 0 \\ 0 & 0 & z_2 I - BA \end{bmatrix} \text{ şi } \begin{bmatrix} BD \\ 0 \\ BB \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

sînt coprime la stînga în raport cu $\mathbb{C}(z_2)[z_1]$.

Problema alocării, discutată anterior, mai poate fi rezolvată luînd în considerare coeficienţii polinomului caracteristic în locul valorilor proprii ale acestuia. Astfel, fie sistemul 2D descris de

$$\begin{bmatrix} x^o(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j).$$

$$y(i, j) = [C_1 \quad C_2] = \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix},$$

unde $x^o \in \mathbb{R}^n$, $x^v \in \mathbb{R}^m$, $x = [x^o(i, j), x^v(i, j)]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$, $u \in \mathbb{R}^l$, $y \in \mathbb{R}^p$.

Considerăm reacţia aplicată sistemului, de forma,

$$u = k^T x + v, \quad \text{cu } x = \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^r(i, j) \end{bmatrix},$$

unde $v \in \mathbb{R}^l$ este noua intrare, iar $k$ este un vector de dimensiune $n + m$.

Fie $p(z_1, z_2)$ polinomul caracteristic al sistemului iniţial (în buclă deschisă) şi $q(z_1, z_2)$ polinomul caracteristic al sistemului în buclă închisă. Rezultă imediat

$$p(z_1, z_2) = \det\left\{\begin{bmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{bmatrix} - A\right\}, \tag{3.83}$$

$$q(z_1, z_2) = \det\left\{\begin{bmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{bmatrix} - A - Bk^T\right\}, \tag{3.84}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \text{ şi } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \tag{3.85}$$

Se demonstrează [42] că

$$q(z_1, z_2) = p(z_1, z_2) - \lambda^T(z_1, z_2)\, k, \tag{3.86}$$

în care

$$\lambda(z_1, z_2) = \left[\operatorname{adj}\left[\begin{pmatrix} z_1 I_n & 0 \\ 0 & z_2 I_m \end{pmatrix} - A\right]\right] B. \tag{3.87}$$

Se impun cîteva observaţii:

a) datorită modului în care a fost construită reacţia, $k$ trebuie să aibă $n + m$ elemente;

b) atît polinomul $q(z_1, z_2)$, cît şi polinomul $p(z_1, z_2)$ sînt polinoame de gradul $n$ în variabila $z_1$ şi, respectiv, $m$ în variabila $z_2$. Deci numărul maxim de coeficienţi este: $N = (n + 1)(m + 1) - 1 = n \cdot m + n + m$;

c) deoarece $k$ are $n + m$ elemente, numărul coeficienţilor cuprinşi este $n \cdot m$. Deci $k$ nu poate controla toţi coeficienţii lui $q$.

Pornind de la observaţia c), se poate presupune că $q(z_1, z_2)$ are forma generală

$$q(z_1, z_2) = \alpha(z_1, z_2)\, \beta(z_1, z_2), \tag{3.88}$$

unde
$$\alpha(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{c_1} \sum_{j=0}^{c_2} \alpha(i, j)\, z_1^i z_2^j; \quad \alpha(c_1, c_2) = 1, \tag{3.89}$$

$$\beta(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} \beta(i, j)\, z_1^i z_2^j; \quad \beta(d_1, d_2) = 1, \tag{3.90}$$

$$d_1 = n - c_1; \; d_2 = m - c_2;$$

$\alpha(z_1, z_2)$ poate fi privit ca partea „specificată" a polinomului caracteristic $q(z_1, z_2)$, iar $\beta(z_1, z_2)$ ca partea „necontrolabilă" a aceluiaşi polinom. Presupunem

că $\alpha(z_1, z_2)$ are atîția coeficienți cîte grade de libertate are $k: c_1c_2 + c_1 + c_2 = n + m$. Rezultă că $\beta(z_1, z_2)$ poate fi evidențiat astfel:

$$\beta(z_1, z_2) = z_1^{d_1} z_2^{d_2} + h^T(z_1, z_2)\, \beta^*, \tag{3.91}$$

unde

$$h = \begin{bmatrix} z_1^{d_1-1} \cdot z_2^{d_2} \\ z_1^{d_1} \cdot z_2^{d_2-1} \\ \vdots \\ z_1^0 \cdot z_2^0 \end{bmatrix}, \quad \beta^* = \begin{bmatrix} \beta(d_1 - 1, d_2) \\ \beta(d_1, d_2 - 1) \\ \vdots \\ \beta(0, 0) \end{bmatrix}. \tag{3.92}$$

Se observă că $\beta^*$ cuprinde toți coeficienții necunoscuți ai lui $\beta(z_1, z_2)$. Cu aceste notații relația de legătură dintre $\beta(z_1, z_2)$ și $q(z_1, z_2)$ va conduce la

$$\lambda^T(z_1, z_2)\, k = p(z_1, z_2) - \alpha(z_1, z_2)\, \beta(z_1, z_2) =$$

$$= p(z_1 z_2) - \alpha(z_1, z_2)\, [z_1^{d_1}, z_2^{d_2} + h^T(z_1, z_2)\, \beta^*]. \tag{3.93}$$

Fie

$$g^T(z_1, z_2) = [\lambda^T(z_1, z_2) \,\vdots\, \alpha(z_1, z_2)\, h^T(z_1, z_2)],$$

$$\xi^T = [k^T \,\vdots\, \beta^{*T}],$$

$$e(z_1, z_2) = p(z_1, z_2) - z_1^{d_1} z_2^{d_2}\, \alpha(z_1, z_2).$$

Va rezulta

$$g^T(z_1, z_2)\, \xi = e(z_1, z_2), \tag{3.94}$$

unde $\xi$ este un vector coloană necunoscut, cuprinzînd $\gamma = n + m + d_1 \cdot d_2 + d_1 + d_2$ elemente.

Problema alocării poate fi privită acum sub următorul aspect: dîndu-se sistemul în buclă deschisă și polinomul „fixat" $\alpha(z_1, z_2)$, să se determine $k$, astfel încît partea controlabilă a polinomului caracteristic al sistemului în buclă închisă, $p(z_1, z_2)$ să fie $\alpha(z_1, z_2)$, simultan cu găsirea părții necontrolabile $\beta(z_1, z_2)$. Rezolvarea ecuației (3.94) poate fi făcută în două moduri. Astfel:

a) Se evaluează ecuația în $\gamma = n + m + d_1 d_2 + d_1 + d_2$ puncte diferite $(z_{1i}, z_{2i})$. Se obține un sistem de ecuații liniare avînd $\gamma$ ecuații cu $\gamma$ necunoscute, sub forma

$$M^* \xi = e^*,$$

unde

$$M^* = \begin{bmatrix} g^T(z_{11}, z_{21}) \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ g^T(z_{1\gamma}, z_{2\gamma}) \end{bmatrix}; \quad e^* = \begin{bmatrix} e(z_{11}, z_{21}) \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ e(z_{1\gamma}, z_{2\gamma}) \end{bmatrix}, \tag{3.95}$$

în care trebuie ca $\det M^* \neq 0$. Dacă nu este respectată această condiție, atunci trebuie luată o altă mulțime cu valori $(z_{1i}, z_{2i})$;

b) Dacă se consideră că

$$g(z_1, z_2) = \sum_{i,\, j \in C(i,\, j)} \sum g(i, j) z_1^i z_2^j, \tag{3.96}$$

$$e(z_1, z_2) = \sum_{i,\, j \in C(i,\, j)} \sum e(i, j) z_1^i z_2^j,$$

în care $C(i, j)$ reprezintă toate combinațiile posibile ale lui $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ exceptînd perechea $(n, m)$ (care nu apare în ecuația inițială), atunci va rezulta faptul că ecuația este o identitate 2D, care este adevărată numai în cazul în care coeficienții puterilor lui $z_1^i \; z_2^j$ sînt aceiași, deci

$$g^T(i, j)\xi = e(i, j)\,;\; (i, j) \in C(i, j),$$

unde

$$\begin{bmatrix} g^T(n-1, m) \\ g^T(n, m-1) \\ \vdots \\ g^T(0, 0) \end{bmatrix} \xi = \begin{bmatrix} e(n-1, m) \\ e(n, m-1) \\ \vdots \\ e(0, 0) \end{bmatrix}; \tag{3.97}$$

relația de mai sus are $n \cdot m + n + m$ ecuații și

$$\gamma = n + m + d_1 d_2 + d_1 + d_2 \text{ necunoscute.}$$

Deci numărul ecuațiilor este cu $n \cdot m - d_1 d_2 - d_1 - d_2$ mai mare decît numărul necunoscutelor. Rezolvarea subsistemului avînd $\gamma$ ecuații trebuie să verifice întreg sistemul, în caz contrar, $\alpha(z_1, z_2)$ nu este o parte „controlabilă" a lui $q(z_1, z_2)$. Se observă că procedura poate oferi indicații asupra condițiilor în care ecuația (3.94) are soluții sau nu.

## 3.4. Stabilite internă (asimptotică)

Fie un sistem 2D, reprezentat printr-un model de tipul Roesser

$$\begin{bmatrix} x^o(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j),$$

$$y(i, j) = [C_1 \;\; C_2] \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Fie
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \text{ iar } \; i, j \in \mathbb{N}.$$

Dacă $u(i, j) = 0$, conform (3.9) rezultă

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{j} A^{i, j-k} \begin{bmatrix} x^o(0, k) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{h=0}^{i} A^{i-h, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(h, 0) \end{bmatrix}, \tag{3.98}$$

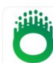
în care $A^{i,j}$ este matricea de tranziție a sistemului.

Fie
$$X_r = \{x(i, j)\,;\, x(i, j) \in X,\; i + j = r\}. \tag{3.99}$$

Fie $\quad \|x\|$ — norma lui $x$; definim norma

$$\|X_r\| = \sup_{n \in \overline{0, r}} \|x(r-n, n)\|. \tag{3.100}$$



Scanned with OKEN Scanner


*Definiția 3.7.* Sistemul descris de (3.3) este asimptotic stabil, dacă pentru $v = 0$, și $\|X_0\|$ finit, $\|X_i\| \to 0$, pentru $i \to \infty$.

Analiza stabilității asimptotice a sistemelor 2D se reduce la investigarea poziției zerourilor polinomului caracteristic al matricei $A$.

Din (3.23), (3.24) și (3.25) s-a văzut că modelele de stare $R$ și $F/M$ acoperă aceeași clasă de funcții de transfer.

În acest context, luînd în considerare modelul $F/M$, analiza stabilității asimptotice revine la a localiza zerourile polinomului

$$\det[I - z_1 A_1^0 - z_2 A_2^0] = 0. \tag{3.101}$$

Dacă se utilizează în analiză modelul de stare $R$, trebuie să se localizeze zerourile polinomului

$$\varphi(z_1, z_2) = \det\left[I - z_1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} - z_2\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \tag{3.102}$$

sau

$$\varphi(z_1, z_2) = \det\begin{bmatrix} I - z_2 A_1 & -z_2 A_2 \\ -z_1 A_3 & I - z_1 A_4 \end{bmatrix}. \tag{3.103}$$

Aplicînd metoda Schur lui (3.103), rezultă

$$\varphi(z_1, z_2) = |I - z_2 A_1|\, |I - z_1 A_4 - z_1 z_2 A_3 (I - z_2 A_1)^{-1} A_2|. \tag{3.104}$$

Testarea existenței sau a neexistenței rădăcinilor din (3.104), în interiorul zonei

$$U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : |z_1| \leqslant 1,\ |z_2| \leqslant 1\}$$

se poate face cu ajutorul testului de stabilitate Huang (prezentat anterior). În aceste condiții,

$$\begin{gathered} \varphi(z_1, z_2) \neq 0, \text{ pentru } z_1, z_2 \in U, \text{ dacă} \\ |I - z_2 A_1| \neq 0, \text{ pentru } |z_2| \leqslant 1, \\ |I - z_1(A_4 + z_2 A_3 (I - z_2 A_1)^{-1} A_2)| \neq 0, \\ \text{pentru } |z_2| = 1;\ |z_1| \leqslant 1. \end{gathered} \tag{3.105}$$

Condițiile din (3.105) sînt identice cu

$$\|A_4\| + \|A_3\|\,\|A_2\|\,(1 - \|A_1\|)^{-1} < 1$$

sau

$$\|A_1\| + \|A_3\|\,\|A_2\|\,(1 - \|A_4\|)^{-1} < 1. \tag{3.106}$$

Condițiile (3.106) se înscriu în condițiile generale de stabilitate, echivalente cu teorema Shanks, stabilite de Bolland și Owens în [31].

Trebuie remarcat un lucru important și anume că, pusă sub acest aspect, stabilitatea asimptotică poate fi testată utilizînd testele polinomiale de stabilitate BIBO (prezentate în lucrare).



Scanned with OKEN Scanner

Revenind în cazul funcţiilor de transfer, rezultă deci că stabilitatea asimptotică este dependentă de poziţia rădăcinilor numitorului funcţiei de transfer respective (fapt cunoscut din teoria sistemelor 1D). Altfel spus, stabilitatea asimptotică implică stabilităţi BIBO.

Dacă însă, pe baza funcţiei de transfer se construieşte o realizare $A$, $B$, $C$ (de exemplu, de tipul (3.23)), determinantul (3.101) este identic cu numitorul funcţiei de transfer iniţiale numai în anumite condiţii [19] de coprimitate a polinoamelor ce formează numărătorul lui (3.23). Ca atare există următoarele implicaţii fundamentale :

Stabilitate asimptotică ⇒ stabilitate BIBO.

Stabilitate BIBO + coprimitate ⇒ stabilitate asimptotică.

Condiţii necesare şi suficiente pentru asigurarea stabilităţii asimptotice, oarecum similare cu cele obţinute în [34], sînt prezentate în [35] şi sînt obţinute pe baza lui (3.9), utilizînd proprietăţile matricei $A^{i,j}$ (v. cap. 3.1).

Testarea stabilităţii asimptotice se poate face şi pe baza funcţiilor Liapunov [34]. Detalii suplimentare pot fi obţinute de cei interesaţi consultînd [35].

## 3.5. Aspecte privind decuplarea sistemelor 2D

Problematica decuplării sistemelor discrete 2D este relativ recent abordată în teoria sistemelor discrete bidimensionale. O tratare unitară şi nouă este făcută în [36].

Noutatea constă în prezentarea unei transformări general valabile a sistemelor în studiu în sisteme discrete 1D, ceea ce prezintă marele avantaj al utilizării teoriei clasice a decuplării, demonstrată în 1967 de Falb şi Wolovich.

Astfel sistemul (3.3) poate fi rescris sub o formă compactă,

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

în care

$$x' = \begin{bmatrix} x^o(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1, C_2], \quad x^o \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad x^v \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

Sistemului i se aplică o reacţie de stare de forma

$$u = Fx + Gv,$$

unde $F$ este matrice de dimensiune $n_1 \times n_2$ ; $G$ este matrice nesingulară de dimensiune $m \times m$ ; $v \in \mathbb{R}^m$ este noua intrare a sistemului.

În aceste condiţii, sistemul în buclă închisă devine

$$\begin{aligned} x' &= (A + BF)\, x + BGV, \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Problema decuplării sistemelor 2D se reduce la aceea de a determina matricele $F$ şi $G$, astfel încît funcţia de transfer $H(z_1, z_2)$ (3.26) să fie o matrice nesingulară şi diagonală.

În vederea explicitării acestor restricții, matricea $H(z_1, z_2)$ este rescrisă,

$$H(z_1, z_2) = C[I\varphi - [I\varphi - S + (A + BF)]]^{-1} BG,$$

în care $\varphi$ este o variabilă „falsă", care nu influențează comportarea sistemului (și deci poate lua orice valoare), sau

$$H(z_1, z_2) = C(I\varphi - Q)^{-1} BG,$$

unde

$$Q = I\varphi - S + A + BF; \quad S = \begin{bmatrix} z_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & z_2 I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

Calculul matricei $[I\varphi - Q]^{-1}$ se poate face în mai multe moduri. În lucrare a fost ales algoritmul Leverrier și $H(z_1, z_2)$ a fost dezvoltată,

$$H(z_1, z_2) = q^{-1}(z_1, z_2)\ c[\varphi^{n_1+n_2-1} R_0 + \varphi^{n_1+n_2-2} R_1 + \dots$$
$$\dots + \varphi R_{n_1+n_2-2} + R_{n_1+n_2-1}]\ BG,$$

în care $q(z_1, z_2) = \det\,[I\varphi - Q)$ și

$$\begin{aligned} R_0 &= I_{n_1+n_2}, \\ R_1 &= QR_0 + q_1 I, \\ &\vdots \\ R_{n_1+n_2-1} &= QR_{n_1+n_2-2} + q_{n_1+n_2-1}, \end{aligned} \qquad (3.108)$$

iar

$$\begin{aligned} q_1 &= -\operatorname{tr}[Q], \\ q_2 &= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}[QR_1], \\ &\vdots \\ q_{n_1+n_2} &= -\frac{1}{n_1+n_2}\operatorname{tr}[Q\,R_{n_1+n_2-1}]. \end{aligned}$$

Dacă în (3.108) se consideră $\varphi = 1$, atunci

$$Q(z_1, z_2) = (I - S + A) + BF \stackrel{\Delta}{=} \hat{A} + BF,$$

$$H(z_1, z_2) = q^{-1}(z_1, z_2)\, C\left[\sum_{i=0}^{n_1+n_2-1} R_i\right] BG,$$

$$q(z_1, z_2) \doteq 1 + \sum_{i=1}^{n_1+n_2} q_i.$$

Autorul lucrării face conexiunea cu teoria 1D a decuplării prin reacție, prin definirea indicilor $d_q$ (Falb și Wolovich) sub forma

$$d_q = \min\{i : C_q\hat{A}^i B \neq 0,\ i = 0, 1, \dots, n_1 + n_2 - 1\}$$

(prin $C_q$ s-a notat linia $q$ a lui $C$).

Se ajunge astfel la definirea matricelor $A^*$ și $B^*$,

$$[B^*]^T = [C_1\hat{A}^{d_1}B \vdots C_2\hat{A}^{d_2}B \vdots \cdots C_m\hat{A}^{d_m}B],$$
$$[A^*]^T = [C_1\hat{A}^{d_1} \vdots C_2\hat{A}^{d_2} \vdots \cdots C_m\hat{A}^{d_m}],$$

Scanned with OKEN Scanner

care au forme similare cu cele care apar în cazul 1D. Diferenţa constă în aceea că $B^*$ şi $A^*$ sînt matrice polinomiale în $z_1$, $z_2$ (datorită lui $\hat{A}$).

Existenţa unor matrice $F$ şi $G$, care decuplează sistemul, este tratată prin următoarea teoremă.

**Teorema 3.13.** Există o pereche de matrice polinomiale $F(z_1, z_2)$ şi $G(z_1, z_2)$, care decuplează sistemul, dacă şi numai dacă

$$\det B^* \neq 0.$$

În aceste condiţii matricele $F$ şi $G$ au formele

$$F = -(B^*)^{-1}A^* \hat{A},$$

$$G = (B^*)^{-1}.$$

În general, clasa matricelor $F$ care decuplează sistemul este dată de teorema următoare.

**Teorema 3.14.** Fie :

$$T^q = \begin{bmatrix} C_q(\hat{A} + BF)^{n_1+n_2-1} B \\ \vdots \\ C_q(\hat{A} + BF)^{d_q} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

($0$ — matrice de dimensiuni $d_q \times m$).

Matricea $F$ decuplează sistemul 2D, dacă şi numai dacă rang $T^q = 1$, pentru toţi $q = 1, \ldots, m$.

Calculul matricei $F$, pe baza teoremei 3.14, conduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii neliniare. De aceea, în continuare, lucrarea prezintă o procedură de sinteză a lui $F$, prin care se ajunge la determinarea acesteia pe baza formulei

$$F = (B^*)^{-1}[\sum_{k=0}^{\delta} M_k C\hat{A}_k - A^*\hat{A}], \tag{3.109}$$

în care $\delta = \max\{d_q\}$, iar $M_k$ este o matrice diagonală.

Lucrarea lui B. G. Mertzios [36] aduce o contribuţie importantă teoriei sistemelor discrete 2D, deschizînd în acelaşi timp noi posibilităţi de abordare a problemei alocabilităţii. Într-adevăr în (3.109) există $m + \sum_{q=1}^{m} d_q$ elemente libere şi diferite de zero ale matricei $M_k$, care pot fi utilizate conform unor diverse cerinţe de proiectare (inclusiv prin alocarea polilor), respectînd totodată şi decuplarea sistemului.

În acest sens, cei interesaţi pot consulta şi articolul lui P. N. Paraskevopoulos [37], în care problema alocării polilor este prezentată după o metodologie similară, dar fără a se asigura şi decuplarea sistemului.

## 3.6. Observeri 2D

Problema sintezei observerilor 2D este relativ nou abordată în contextul teoriei algebrice a sistemelor liniare discrete 2D.

Unii algoritmi de sinteză sînt prezentaţi în [38], [39]. Trebuie remarcat însă, pe de o parte, că tehnicile utilizate sînt aplicabile unor clase restrînse



Scanned with OKEN Scanner

de sisteme 2D, iar pe de altă parte, problema stabilității observerilor rezultați este discutabilă. O abordare originală și care are avantajul că elimină neajunsurile de mai sus este prezentată în [40].

Lucrarea tratează problema construirii unui observer de ordin minimal, utilizînd ca model de stare, modelul $R$.

Astfel, pentru sistemul reprezentat de (3.3) se construiește un model (conform teoriei lui Luenberger)

$$\begin{bmatrix} z^o(i+1, j) \\ z^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^o(i, j) \\ z^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) +$$

$$+ \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} y(i, j) - [C_1 \; C_2] \begin{bmatrix} z^o(i, j) \\ z^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad (3.110)$$

în care matricea $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$ trebuie determinată. Vectorul de eroare se definește, în mod normal,

$$\begin{bmatrix} e^o(i, j) \\ e^v(i, j) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z^o(i, j) \\ z^v(i, j) \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Din (3.70) și (3.111),

$$\begin{bmatrix} e^o(i+1, j) \\ e^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - K_1C_1 & A_2 - K_1C_2 \\ A_3 - K_2C_1 & A_4 - K_2C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^o(i, j) \\ e^v(i, j) \end{bmatrix}; \quad (3.112)$$

(3.112) este un sistem 2D. Ca atare, evoluția stării poate fi calculată pe baza matricei $A_K^{i,j}$, dedusă din (3.112). Este evident că dacă $A_K^{i,j} \to 0$, $i, j \to \infty$, vectorul eroare tinde la zero, independent de valoarea sa inițială și de mărimea de intrare.

Rezultă deci că existența unui observer este redusă la o problemă de testare a stabilității. Evoluția lui $A^{i,j}$, în cazul în care $i, j \to \infty$, a fost studiată de Ahmed [30]. Rezultă o nouă teoremă.

**Teorema 3.15.** Pentru sistemul (3.3) există un observer de ordin maxim, dacă

a) $A_2C_2^gC_2 = A_2$;

b) perechea $(I - C_2C_2^g)\, C_1$, $A_1 - A_2C_2^g\, C_1$ este detectabilă;

c) $C_2$, $A_4$ este detectabilă

($C_2^g$ este inversa generalizată a lui $C_2$ [41]). Se observă că a) este totdeauna îndeplinită în cazul sistemelor (3.3), care au o funcție de transfer cu numitor separabil (modelul Attassi).

Existența unui observer de ordin minimal este demonstrată pe baza unei construcții similare cu cazul 1D (Luenberger).

Astfel, pentru sistemul (3.3) se construiește:

$$\begin{bmatrix} z^o(i+1, j) \\ z^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^o(i, j) \\ z^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} y(i, j) + \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \end{bmatrix} u(i, j), \quad (3.113)$$

$$\begin{bmatrix} x^o(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \\ \hat{C}_3 & \hat{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^o(i, j) \\ z^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix} y(i, j),$$

unde $z^o \in \mathbb{R}^\nu$, $z^v \in \mathbb{R}^\mu$ sînt vectorii de stare orizontali și verticali ai observerului.



Scanned with OKEN Scanner

Sistemul (3.113) este un observer de ordinul $\nu + \mu$, al sistemului (3.3), dacă

$$\lim_{i,j\to\infty} \begin{bmatrix} \hat{x}^o(i,j) - x^o(i,j) \\ \hat{x}^v(i,j) - x^v(i,j) \end{bmatrix} = 0. \tag{3.114}$$

Condiţiile, care asigură acest lucru sînt explicitate de următoarea lemă.

**Lema 3.2.** Sistemul (3.113) este un observer de ordin $(\nu + \mu)$ al sistemului (3.3), dacă există matricea $U$ care satisface condiţiile

$$\hat{A}U + \hat{B}C = UA,$$

$$\hat{Y} = UB, \tag{3.115}$$

$$\hat{C}U + \hat{D}C = I_{n_1+n_2}$$

şi dacă sistemul :

$$\begin{bmatrix} e^o(i+1,j) \\ e^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix} e^o(i,j) \\ e^v(i,j) \end{bmatrix} \text{ este asimptotic stabil}$$

$$\left(\hat{A}, A, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \text{ deduse din (3.113)}, \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{A}_4 \end{bmatrix} \text{ etc.}\right),$$

$$U = \begin{bmatrix} U^o & 0 \\ 0 & U^v \end{bmatrix}.$$

Lema 3.2 sugerează faptul că o condiţie necesară pentru îndeplinirea lui (3.75) este

$$\text{rang}\begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix} = n_1 + n_2.$$

În această situaţie,

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & A \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix}^{-1}, \hat{Y} = UB,$$

ceea ce demonstrează că parametrii observerului sînt unic determinaţi, astfel încît sinteza unui observer se reduce la aflarea matricei $U$, care, în condiţiile lui (3.75), să conserve stabilitatea sistemului.

În continuare, lucrarea demonstrează condiţiile de existenţă a unui observer minimal.

Importantă este însă corelaţia pe care o face autorul între existenţa observerului general şi al celui minimal.

**Teorema 3.16.** Dacă pentru sistemul (3.3) se poate construi un observer general, atunci se poate construi şi un observer minimal.

Rezultatele obţinute de Kawaji, în lucrarea prezentată anterior, sînt deosebit de valoroase, deoarece încercările anterioare de construcţie a observerilor minimali 2D nu au avut un grad de generalitate, iar pe de altă parte, problema stabilităţii lor rămînea în suspensie.

## 3.7. Sinteză exactă 2D

Problema sintezei exacte în cazul sistemelor discrete 2D a fost relativ puţin abordată, datorită complexităţii acestora. Astfel în [44] şi [45] se dă o rezolvare a acesteia pentru o clasă restrînsă de reacţii (proporţionale) şi utilizînd numai unul din vectorii de stare ai sistemului (3.3). Alte lucrări abordează aceeaşi problemă, oferind, de asemenea, soluţii particulare (de exemplu, compensatoare de tipul proporţional sau PID). Toate aceste soluţii oferă însă un număr mic de parametri liberi, insuficienţi pentru satisfacerea unor cerinţe de proiectare mai complexe.

Sinteza exactă constă în principiu în a proiecta un compensator care, în legătură cu un sistem dat, să conducă la un sistem rezultant ale cărui performanţe sînt predeterminate. Problema este de o mare importanţă practică, deoarece este posibil să „transformi" un sistem dat cu performanţe nesatisfăcătoare într-unul care satisface cerinţele impuse în exploatare.

Lucrarea vizată aici este cu atît mai importantă, cu cît, chiar în cazul 1D, sinteza exactă este dificil de rezolvat.

Šebek [46] abordează această problemă, în cazul sistemelor 2D, pe baza ecuaţiilor matriceale polinomiale.

O matrice 2D $P(z_1, z_2)$ peste $\mathbb{R}[z_1, z_2]$ de rang maxim este stabilă, dacă şi numai dacă zerourile sale cad în regiunea de stabilitate (vezi teorema Shanks). Matricele polinomiale $P$, $Q$ peste $\mathbb{R}[z_1, z_2]$, cu acelaşi număr de coloane, au un zero la dreapta $(z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ comun, dacă şi numai dacă

$$\text{rang}\begin{bmatrix} P_1(z_1^0, z_2^0) \\ Q(z_1^0, z_2^0) \end{bmatrix} < \text{rang}\begin{bmatrix} P(z_1, z_2) \\ Q(z_1, z_2) \end{bmatrix}.$$

O matrice polinomială este unimodulară, dacă şi numai dacă are o inversă (polinomială), şi este unimodulară la dreapta, dacă şi numai dacă are o inversă la dreapta.

Cu aceste notaţii şi definiţii, problema sintezei exacte poate fi formulată astfel:

Fie un sistem 2D, liniar, descris de un model de stare compact (3.3),

$$U = AX_f;\ Y = CX_f;\ Z = BX_f, \tag{3.116}$$

$U - (m \times 1)$;

$X_f$ — vectorul de stare al sistemului;

$Y_f$ — ieşirea care trebuie controlată;

$Z$ — ieşirea măsurată;

$A, B, C$ matrice peste $\mathbb{R}[z_1, z_2]$;

$A, B$ — coprime la dreapta (au numai divizori la dreapta unimodulari).

Se cere construcţia unui compensator, astfel încît sistemul rezultat să fie guvernat de ecuaţiile

$$U_N = FX_M,\ Y = GX_M, \tag{3.117}$$

$U_N$ — noul vector de intrare $(q \times 1)$;

$X_M$ — noul vector de stare (al sistemului global rezultat);

$F, G$ — matrice peste $\mathbb{R}[z_1, z_2]$ — sînt coprime la dreapta, avînd dimensiunile $(q \times q)$ şi $(p \times q)$.

Este clar că în acest stadiu nu se fac și alte specificații asupra sistemului rezultat. Din punct de vedere practic, este însă necesar ca acesta să fie stabil.

Ecuația generală a compensatorului este

$$PU = -QZ + RU_N,$$

în care $P$, $Q$, $R$ sînt matrice peste $\mathbb{R}[z_1, z_2]$ — avînd dimensiunile $(m \times m)$, $(m \times n)$ și $(m \times q)$, $P$ trebuie să fie inversabilă.

În aceste condiții (3.116) devine

$$Y = CX_f; \quad RU_N = (PA + QB)X_f. \tag{3.118}$$

Comparînd (3.118) cu (3.117), problema sintezei exacte se reduce la o problemă algebrică, și anume de a găsi $P$, $Q$, $R$, astfel încît

$$C(PA + QB)^{-1} R = GF^{-1}. \tag{3.119}$$

Una dintre condițiile existenței lui (3.119) este ca

$$\text{rang } [C \ G] = \text{rang } [C] = r \leqslant m. \tag{3.120}$$

În continuare, autorul, apelînd la aceeași teorie algebrică a matricelor polinomiale 2D, exprimă matricele $R$, $P$, $Q$ sub o formă convenabilă, parametrică.

Astfel $C = D\bar{C}$; $G = D\bar{G}$; $G$ — c.m.m.d.c.s. al matricelor $C$ și $G$; iar: $\bar{F}$ și $\bar{G}$ sînt două matrice peste $\mathbb{R}[v, w]$ — coprime la stînga.

(3.119) devine:

$$\bar{F}\bar{C}(PA + QB)^{-1} R = \bar{G}.$$

Dacă $T$ este c.m.m.d.c.s. al matricelor $(PA + QB)$ și $R$, rezultă ($T$ nesingulară),

$$PA + QB = TX,$$
$$R = TY$$

și deci

$$\bar{F}\bar{C}X^{-1}Y = \bar{G}; \tag{3.121}$$

$X$, $Y$ sînt coprime la stînga și deci

$$\bar{F}\bar{C} = UX; \quad G = UY,$$

unde $U$ este o matrice polinomială peste inelul $\mathbb{R}[z_1, z_2]$ și unimodulară la dreapta.

Pentru a se asigura stabilitatea internă a soluției oferite pentru sinteza exactă, autorul demonstrează următoarea teoremă.

**Teorema 3.17.** Stabilitatea soluției sintezei exacte este asigurată, dacă și numai dacă

$\bar{F}$ — stabilă; $\bar{C}$ — stabilă; $A$, $B$ nu au zerouri comune, în afara regiunii de stabilitate $\Gamma^2$.

Lucrarea prezintă în continuare, algoritmul de sinteză a matricelor $P$, $Q$, $R$, pe baza matricelor $A$, $B$, $C$ și $F$ și $G$.



Scanned with OKEN Scanner

# 4. SINTEZA SISTEMELOR 2D

Trebuie remarcat de la început că sinteza sistemelor 2D este o operație complicată și laborioasă. Tehnicile de sinteză dezvoltate în cele ce urmează sînt axate în special pe atingerea a două deziderate principale :

a) sistemul 2D să aibă o funcție pondere prestabilită (în sensul că răspunsul sistemului să îndeplinească anumite condiții în ceea ce privește spectrul de frecvențe și amplitudine) ;

b) să fie stabil (condițiile de stabilitate folosite sînt cele analizate în capitolul precedent) ;

c) să fie, pe cît posibil, ușor implementabil.

Sinteza sistemelor 2D este o problemă specifică, în sensul că tehnicile de sinteză 1D, în marea lor majoritate, nu pot fi aplicate în această situație, datorită neliniarităților care apar în determinarea parametrilor ce caracterizează un astfel de sistem.

În continuare vor fi prezentate trei situații semnificative.

## 4.1. Sinteza sistemelor 2D, bazată pe utilizarea funcției de transfer 2D

Fie dată o funcție pondere, de forma $\{d_{ij}\}$, pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, M_d$ și $j = 0, 1, 2, \ldots, N_d$, care trebuie obținută prin intermediul unui sistem 2D cauzal, a cărui funcție de transfer este dată de

$$H^{**}(z_1, z_2) = \frac{A^{**}(z_1, z_2)}{B^{**}(z_1, z_2)},$$

în care

$$A^{**}(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j} z_1^i z_2^j,$$

$$B^{**}(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j} z_1^i z_2^j, \tag{4.1}$$

unde : $Ma$, $Na$, $Mb$, $Nb$ sînt arbitrari, dar fixați. Rezultă

$$H^{**}(z_1, z_2)\, B^{**}(z_1, z_2) = A^{**}(z_1, z_2). \tag{4.2}$$

Dacă se ţine seama că produsul a două polinoame 2D este identic cu convoluţia secvenţelor de origine (vezi transformările $z$ 2D), rezultă că (4.2) poate fi scrisă sub forma

$$a_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\, h_{m-i,n-j}. \tag{4.3}$$

Parametrii $a_{m,n}$ sînt definiţi pentru $m = 0, 1, 2, \ldots, M_a$, $n = 0, 1, 2, \ldots N_a$. În afara acestei regiuni, $a_{m,n} = 0$.

Fie următoarele mulţimi de perechi de numere întregi:

$$S_{a_1} = \{(i, j)\,;\ 0 \leqslant i \leqslant M_a\,;\ 0 \leqslant j \leqslant N_a\} \tag{4.4}$$

şi

$$S_{a_2} = \{(m, n)\,;\ m > 0,\ n > 0,\ m, n \notin S_{a_1}\}. \tag{4.5}$$

Trebuie determinate valorile lui $a_{m,n}$ pentru $(m, n) \in S_{a_1}$, deoarece pentru $(m, n) \in S_{a_2}$, $a_{m,n} = 0$.

Fie în (4.3) $b_{00} = 1$. Se obţine, pentru $(m, n) \in S_{a_2}$,

$$h_{m,n} = -\sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b_{i,j} h_{m-i,n-j}. \tag{4.6}$$

Fie transformata $z$ 2D nestandard a funcţiei pondere $\{d_{i,j}\}$,

$$D^{**}(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{M_d} \sum_{j=0}^{N_d} d_{i,j} z_1^i z_2^j \tag{4.7}$$

şi mulţimea de perechi de numere întregi,

$$S_d = \{(m, n) \mid 0 \leqslant m \leqslant M_d\,;\ 0 \leqslant n \leqslant N_d\}. \tag{4.8}$$

Ţinînd seama de relaţiile de recurenţă stabilite pentru sistemele 2D, rezultă că pentru mulţimea de perechi de numere întregi $(m, n) \in \{S_{a_2} \cap S_d\}$ şi printr-o alegere judicioasă a coeficienţilor $b_{i,j}$, $h_{m,n}$, trebuie să se aproximeze răspunsul dorit $d_{m,n}$.

Relaţia (4.6) poate fi reformulată astfel:

$$d_{m,n} \cong -\sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b_{i,j}\, d_{m-i,n-j}.$$

Fie $e_{m,n}$ o eroare care restabileşte egalitatea, deci

$$d_{m,n} = e_{m,n} - \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b_{i,j} d_{m-i,n-j}\,;\ (m, n) \in S_{a_2} \cap S_d\,;$$

$e_{m,n}$ poate fi explicitat,

$$e_{m,n} = \sum_{i=0}^{M_s} \sum_{j=0}^{N_s} b_{i,j} d_{m-i,n-j}\,; \quad (m,\ n) \in S_{a_2} \cap S_d\,;$$

$b_{i,j}$ poate fi aflat prin minimizarea expresiei

$$\bar{e}^2 = \sum_{(m,n)} \sum [\sum_{(i,j)} \sum b_{i,j}\, d_{m-i,n-j}]^2, \tag{4.9}$$

$$\text{pentru } (i,\ j) \in S_b,\ (m,\ n) \in S_{a_2} \cap S_d,$$

iar

$$S_b = \{(i,\ j)\,;\ 0 \leqslant i \leqslant M_b,\ 0 \leqslant j \leqslant N_b\}.$$

Dacă se diferenţiază (4.9), se obţine sistemul de ecuaţii liniare (în număr de $M_b N_b + M_b + N_b$, avînd $M_b N_b + M_b + N_b$ necunoscute $b_{i,j}$).

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b_{i,j} F_{k,l,i,j} = F_{k,l}\,; \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \ldots, M_b, \\ l = 0, 1, 2, \ldots, N_b, \end{array} \tag{4.10}$$

în care

$$F_{k,l,i,j} = \sum_{(m,n)} \sum d_{m-i,n-j}\, d_{m-k,n-l},$$

$$F_{k,l} = -\sum_{(m;n)} \sum d_{m,n}\, d_{m-k,n-l}$$

$$(m,\ n) \in S_{a_2} \cap S_d.$$

O dată calculat $B^{**}(z_1, z_2)$, se poate trece la calculul coeficienţilor lui $A^{**}(z_1, z_2)$. O modalitate asemănătoare cu cea prezentată mai sus este de a calcula coeficienţii lui $a_{i,j}$ printr-un criteriu de medie pătratică minimă între $A^{**}(z_1, z_2)/B^{**}(z_1, z_2)$ şi $D^{**}(z_1, z_2)$. (Problema este privită ca determinarea unui sistem 2D, $A(z_1, z_2)$, dacă se cunoaşte intrarea $1/B^{**}(z_1, z_2)$ şi răspunsul dorit, $D^{**}(z_1, z_2)$).

În acest sens, o soluţie poate fi utilizarea algoritmului Levinson, prin generarea unor polinoame ortogonale 2D de tip Szegö [48].

Presupunem că sînt date şirurile 2D (suprafeţele)

$$\{b_{k,l}\} \text{ şi } \{c_{k,l}\}\ k \geqslant 0,\ l \geqslant 0 \Rightarrow \text{satisfăcînd}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |b_{k,l}|^2 < \infty \text{ şi } \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |c_{k,l}|^2 < \infty$$

(şiruri 2D de pătrat sumabil).

Se cere să găsim o secvenţă (suprafaţă) $\{a_{k,l}\}$, de dimensiune $(n + 1) \times (m + 1)$ pentru care

$\{b\} * \{a\}$ este cea mai bună aproximare prin medie pătratică a şirului $\{c\}$ ($*$ — produs de convoluţie).

Fie suprafaţa $U_{k,l}$ definită ca translatata şirului $b$,

$$U_{k,l}(i,\ j) = b_{i-k,j-l}$$

(care este 0 pentru indici negativi).

Definim un produs scalar prin

$$\langle a, b\rangle = \Sigma\,\Sigma\, a_{k,l} b_{k,l}$$

şi o normă

$$\|a\| = \langle a, a\rangle = \Sigma\,\Sigma\, |a_{k,l}|^2.$$

Problema de rezolvat devine acum minimizarea normei,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{k,l}\, U_{k,l} - c \right\|.$$

Soluţia satisface sistemul de ecuaţii de forma

$$\left\langle \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{k,l} U_{k,l} - c,\ U_{s,t} \right\rangle = 0, \text{ pentru } 0 \leqslant s \leqslant n,\ 0 \leqslant t \leqslant m,$$

ceea ce poate fi reformulat astfel:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \varphi_{s-k,t-l}\, a_{k,l} = g_{s,t},\ 0 \leqslant s \leqslant n,\ 0 \leqslant t \leqslant m,$$

unde

$$g_{s,t} = \langle c, U_{s,t}\rangle$$

şi

$$\varphi_{k,e} = \langle b, U_{k,e}\rangle \text{ (şir numit } \textit{autocorelaţia} \text{ şirului de intrare).}$$

Coeficienţii $\Phi_{k,e}$ sînt determinaţi de formula

$$\varphi_{k,l} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f(\theta, \psi) \exp[i\,(k\theta + l\psi)]\, d\theta\, d\psi,$$

în care

$$f(\theta, \psi) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,e} \exp[i\,(k\theta + l\psi] \right|^2.$$

Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, vectorii linie ai secvenţei (suprafeţei) $\{a_{j,k}\}$. Fie $G_0, G_1, \ldots, G_n$ vectorii linie ai secvenţei (suprafeţei) $\{g_{r,s}\}$. Ecuaţia ce trebuie rezolvată devine acum

$$\sum_{j=0}^{n} \Phi_{r,j}\, a_j^T = G_r^T,$$

în care $\Phi_{r;j}$ este o matrice $(m+1) \times (m+1)$, dată de

$$\Phi_{r,j}(i, l) = \varphi_{r-j,i-l}.$$

Se poate demonstra că

$$\Phi_{r,j}(i, l) = \varphi_{r-j,i-l} = \overline{\varphi}_{j-r,l-i} = \overline{\varphi}_{j,r}(l, i)$$

şi că

$$\Phi_{r,j} = \Phi_{r+k,j+k}.$$

Dacă definim $\Phi_{k-l} = \Phi_{k,l}$, atunci ecuația poate fi scrisă sub o formă compactă

$$\begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1^* \dots \Phi_n^* \\ \Phi_1 & \Phi_0 \dots \Phi_{n-1}^* \\ \vdots & \\ \Phi_n & \dots \Phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}.$$

În continuare, în [48] se dezvoltă un algoritm care permite rezolvarea ecuației matriceale fără a utiliza inversarea matricelor prin dezvoltarea secvenței necunoscute $\{a_{k,e}\}$, în serie în raport cu polinoame ortonormale (Szegö), ceea ce conduce la obținerea unei proceduri recurente de calcul a coeficienților necunoscuți. Această procedură recurentă este cunoscută sub numele de algoritmul Levinson.

Altă modalitate de a sintetiza un sistem 2D poate fi obținută, dacă se analizează funcția de transfer $H(z_1, z_2)$ a unui sistem 2D și se ține seama de deziderатul c), prezentat anterior. Este evident că atît testarea stabilității, cît și implementarea unui sistem 2D ar fi considerabil ușurată dacă funcția de transfer $H^{**}(z_1, z_2)$ ar putea fi factorizată,

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B_1(z_1)\, B_2(z_2)}. \tag{4.11}$$

În această situație, implementarea ar consta dintr-o cascadă de sisteme de ordin redus, pentru care testele de stabilitate pot fi aplicate rapid și ușor; de asemenea, mai există un avantaj important și anume, în cazul apariției unei instabilități se poate acționa asupra unui singur sistem, pentru redobîndirea stabilității în ansamblu; (4.11) poate fi reformulată și atunci

$$H(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{i,j}}{(z_1 - p_i)(z_2 - q_j)}, \tag{4.12}$$

în ipoteza că gradele lui $B_1$ și $B_2$ sînt egale cu $n$. Funcția pondere este:

$$h_{k,l} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{i,j}\, \alpha_i^k\, \beta_j^l, \tag{4.13}$$

în care

$$C_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{p_i q_j}\,;\ \alpha_i = \frac{1}{p_i}\,;\ \beta_j = \frac{1}{q_j}.$$

*Observație.* (4.13) a fost obținută considerîndu-se $A^{**}(z_1 z_2)$ și $B^{**}(z_1, z_2) = B(z_1)B(z_2)$. Ca atare, în cele ce urmează stabilitatea lui (4.12) implică faptul ca zerourile lui $B(z_2)$ și $B(z_1)$ să fie în afara cercului unitate. Problema care trebuie rezolvată este: în ce condiții și cum poate fi aproximat un sistem 2D, printr-o funcție de transfer de tip (4.12)?

Fie un sistem dat, caracterizat printr-o funcție

$$H_d^{**}(z_1, z_2),\ \text{nenulă pentru } |z_1| \geqslant 1,\ |z_2| \geqslant 1 \ (\text{sistem stabil});$$

să se găsească un sistem de tipul (4.12), care să aproximeze cel mai bine pe $H_d$ printr-un indice de eroare medie pătratică minimă. Altfel spus, trebuie



Scanned with OKEN Scanner

găsită o mulțime de numere complexe $\lambda_{i,j}, p_i, q_i$, $(i, j) \in I_n = [1 \ldots n] \times \times [1 \ldots n]$, care să minimizeze

$$e = \oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2} \left| H_d^{**}(z_1, z_2) - \sum\sum_{i,j \in I_n} \frac{\lambda_{i,j}}{(z_1 - p_i)(z_2 - q_j)} \right|^2 \cdot \frac{dz_1}{2\pi i\, z_1} \cdot \frac{dz_2}{2\pi i\, z_2}, \quad (4.14)$$

cu restricțiile $p \in \{p_i\} \Rightarrow \bar{p} \in \{p_i\}$ ; $q \in \{q_j\} \Rightarrow \bar{q} \in \{q_j\}$ ; $\Gamma_1$ și $\Gamma_2$ sînt frontierele cercului unitate (notate cu $D_1$, $D_2$) din planele $z_1$, respectiv $z_2$.

Fie $\Sigma$, spațiul Hilbert al funcțiilor complexe în două variabile complexe $z_1, z_2$, olomorfe pe $D_1 \times D_2$, de pătrat sumabil pe $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, și fie $\Sigma_n$, subspațiul lui $\Sigma$, generat de sistemul $1/(z_1 - p_i)\,(z_2 - q_j)$ ; $i, j \in I_n$, în care $p_i \neq p_j$, dacă $i \neq j$, și $q_i \neq q_j$, dacă $i \neq j$. Problema se reduce acum la a extrage $n^2$ vectori dintr-o bază a lui $\left\{\frac{1}{(z_1 - p)(z_2 - q)}\ ;\ (p, q) \in \mathbb{C}^2\right\}$, care să genereze pe $\Sigma_n$ astfel încît distanța dintre $H_d$ și $\Sigma_n$ să fie minimă. Rezolvarea se poate face în etape astfel [49]:

a) Se calculează derivatele lui (4.14) în raport cu parametrii și se egalează cu zero;

b) se găsește o bază ortonormală (pentru ușurarea calculului);

c) se utilizează o schemă de calcul iterativă.

Făcînd derivatele în (4.14), se obține un sistem neliniar cu $n^2 + 2n$ ecuații avînd $n^2 + 2n$ variabile, de forma

$$\ll H_d^{**}(z_1, z_2) - H_a^{**}(z_1, z_2) \frac{1}{(z_1 - p_i)(z_2 - q_j)} \gg = 0,\ i,\ j \in I_n,$$

$\ll\ \gg$ fiind produs Hilbert;

$$\ll H_d^{**}(z_1, z_2) - H_a^{**}(z_1, z_2) \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{i,j}}{z_2 - q_j} \frac{1}{(z_1 - p_i)^2} \gg = 0, \quad (4.15)$$

$$i = \overline{1, n}$$

$$\ll H_d^{**}(z_1, z_2) - H_a^{**}(z_1, z_2) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i,j}}{z_1 - p_i} \frac{1}{(z_2 - q_j)^2} \gg = 0,$$

$$j = \overline{1, n}$$

în care

$$H_a^{**}(z_1, z_2) = \sum\sum_{(i,j) \in I_n} \frac{\lambda_{i,j}}{(z_1 - p_i)(z_2 - q_j)}.$$

Fie $\Sigma_{1,n}$ și $\Sigma_{2,n}$ subspațiile generate de vectorii liberi

$$1/(z_1 - p_i)^2\,(z_2 - q_j), \qquad (i,\ j) \in I_n$$

și

$$1/(z_1 - p_i)\,(z_2 - q_j)^2, \quad (i,\ j) \in I_n.$$

Fie $\mathfrak{S}_{1,n}$ şi $\mathfrak{S}_{2,n}$, $\Sigma^{\mathrm{I}}_{1,n}$, $\Sigma^{\mathrm{I}}_{2,n}$ spaţiile vectoriale definite de relaţiile

$$\mathfrak{S}_{1,n} = \Sigma_n + \Sigma_{1,n} = \Sigma_n \oplus \Sigma^{\mathrm{I}}_{1,n} ;$$

$$\mathfrak{S}_{2,n} = \Sigma_n + \Sigma_{2,n} = \Sigma_n \oplus \Sigma^{\mathrm{I}}_{2,n}$$

($\oplus$ este suma directă a spaţiilor)
şi $P_i$, $Q_i$, $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{L}_{j,i}$ definite de ecuaţiile

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{i,j}}{(z_2-q_j)} \frac{1}{(z_1-p_i)^2} ; \; i = 1, \; n,$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i,j}}{(z_1-p_i)} \frac{1}{(z_2-q_j)^2} ; \; j = 1, \; n,$$

$$\mathfrak{P}_i = \underset{\Sigma^{\mathrm{I}}_{1,n}}{\mathrm{Proiec}} \; P_i \;\text{ şi }\; \mathfrak{L}_j = \underset{\Sigma^{\mathrm{I}}_{2,n}}{\mathrm{Proiec}} \; Q_j.$$

Sistemul de ecuaţii (4.15) se reduce la

$$\ll H^{**}_d - H^{**}_a \frac{1}{(z_1-p_i)(z_2-q_j)} \gg = 0; \forall i, j \in I_n,$$

$$\ll H^{**}_d, \; \mathfrak{P}_i \gg = 0 ; \; i = 1, \ldots . n,$$

$$\ll H^{**}_d, \; \mathfrak{L}_j \gg = 0 ; \quad j = 1, \ldots, n.$$

În [49], prin construcţia unei baze ortonormale pentru $\Sigma_n$, $\Sigma^{\mathrm{I}}_{1,n}$ şi $\Sigma^{\mathrm{I}}_{2,n}$, sistemul de ecuaţii de mai sus se reduce la un sistem avînd $2n$ ecuaţii cu $2n$ necunoscute, neliniare, pentru rezolvarea căruia este prezentat un algoritm iterativ.

În cele ce urmează vom prezenta un algoritm de sinteză pe baza performanţelor unui sistem 2D, al cărui numitor este factorizabil în polinoame 2D, de ordinul 1 sau 2. O astfel de structură a fost concepută tot în ideea de a uşura aplicarea testelor de stabilitate, precum şi a implementării hardware [50]. Fie

$$H^*(z_1, z_2) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{M_a} \sum\limits_{i=0}^{N_a} a_{i,j} z_1^{-(i-1)}, z_2^{-(j-1)}}{\sum\limits_{j=0}^{M_b} \sum\limits_{i=0}^{N_b} b_{i,j} z_1^{-(i-1)} z_2^{-(j-1)}}, \tag{4.16}$$

care poate fi pus sub forma

$$H^{**}(z_1, z_2) = A \frac{\sum\limits_{l=1}^{M} P^{(l)}(z_1^{-1}, z_2^{-1})}{\sum\limits_{l=1}^{N} Q^{(l)}(z_1^{-1}, \; z_2^{-1})},$$



Scanned with OKEN Scanner

în care

$$P^{(l)} = [1\ z_1^{-1} \dots z_1^{-(n_l^1-1)}] \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}^l \dots a_{1,m_l^1}^l \\ a_{2,1}^l & \\ \vdots & \\ a_{n_l^1,1}^l & a_{n_l^1,m_l^1}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ \vdots \\ z_2^{-(m_l^1-1)} \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

$$Q^{(l)}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = [1\ z_1^{-1} \dots z_1^{-(n_l^2-1)}].$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & b_{1,2}^l \dots b_{1,m_l^2}^l \\ b_{2,1}^l & \\ \vdots & \\ b_{n_l^2,1}^l & b_{n_l^2,m_l^2}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z_2^{-1} \\ \vdots \\ z_2^{-(m_l^2-1)} \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

în care $n_l^1$, $n_l^2$, $m_l^1$, $m_l^2$ pot lua numai valorile 2 sau 3.

Fie caracteristica de amplitudine dorită la ieșirea sistemului, caracterizată prin mulțimea valorilor $Y = Y_{m,n}$, definite în mulțimea de perechi de frecvențe $(\omega_m^1, \omega_n^2)$, $m = 1, \dots, k_1$, $n = 1, 2, \dots, k_2$.

Fie

$$\Phi = [\Phi_1^T, \Phi_2^T, A]^T,$$

în care

$$\Phi_1^T = [a_{21}^1, a_{31}^1, \dots, a_{n_1^1,1}^1, a_{12}^1, a_{22}^1, \dots, a_{n_1^1,2}^1, \dots, a_{n_1^1,m_1^1}^1, \dots a_{n_N^1,m_M^1}^M],$$

$$\Phi_2^T = [b_{21}^1, b_{31}^1, \dots, b_{n_1^2,1}^1, b_{12}^1, b_{22}^1, \dots, b_{n_1^2,2}^1, \dots, b_{n_1^2,m_1^2}^1, \dots, b_{n_N^2,m_M^2}^N],$$

în care $a$, $b$, $A$ sînt parametrii din $H^*(z_1, z_2)$ și $(z_{1m}, z_{2m}) = (e^{i\omega_m^1}, e^{i\omega_n^2})$.

Definim un indice de performanță,

$$y(\Phi) = \sum_{m=1}^{k_1} \sum_{n=1}^{k_2} [|H^{**}_{m,n}| - Y_{m,n}]^p \tag{4.19}$$

$p$, pozitiv, întreg, par.

Problema care trebuie rezolvată este minimizarea lui (4.19) și găsirea vectorului $\Phi$, cu restricția că sistemul rezultat să fie stabil. Se poate găsi un algoritm care să conducă la o procedură optimă de calcul [50].

Astfel se pornește presupunînd niște valori inițiale ale parametrilor vectorului $\Phi$ și, la fiecare iterație, valorile acestor coeficienți să fie schimbate, prin mărirea cu $\Delta\Phi$, astfel încît

$$\frac{\mathrm{d}y(\Phi + \Delta\Phi)}{\mathrm{d}\Delta\Phi} = \frac{\mathrm{d}\left(y(\Phi) + \nabla y^T \cdot \Delta\Phi - \frac{1}{2}(\Delta\Phi)^T[H]\cdot\Delta\Phi\right)}{\mathrm{d}\Delta\Phi} = 0,$$

în care $H$ este o matrice ale cărei elemente sînt

$$h(f, s) = \frac{\nabla^2 y}{\partial\Phi_f \partial\Phi_s};$$



Scanned with OKEN Scanner

$\nabla y$ este vectorul gradient avînd elementele

$$\nabla_i y = \frac{\partial y}{\partial \Phi_i}.$$

Ecuaţia de mai sus se reduce la sistemul de ecuaţii liniare

$$H \Delta \Phi = -\nabla y. \tag{4.20}$$

Problema laborioasă rămîne calculul vectorului gradient $\nabla y$ şi a matricei $H$. Minimizarea indicelui de performanţă poate fi realizată şi prin utilizarea algoritmului Davidson-Fletcher-Powell.

## 4.2. Sinteza sistemelor 2D, utilizînd transformările spectrale

Prin transformare spectrală se înţelege o transformare complexă, care transformă o funcţie de transfer raţională într-o altă funcţie de transfer raţională. Această transformare trebuie să aibă următoarele caracteristici :

a) să transforme un sistem liniar, invariant, stabil tot într-un sistem liniar, invariant, stabil ;

b) să transforme o funcţie raţională, tot într-o funcţie raţională ;

c) să conserve anumite caracteristici (esenţiale) ale spectrului de amplitudini ale sistemului supus transformării.

Utilizarea transformărilor spectrale conduce la implementarea a două strategii distincte de sinteză a sistemelor 2D.

A) Se porneşte de la o funcţie de transfer 1D, $H(u)$, căreia i se aplică o transformare spectrală prin intermediul unei schimbări de variabilă $u=g(u_1, u_2)$, ca rezultat obţinîndu-se o funcţie de transfer 2D, $H(g(u_1, u_2))$, în care $u, u_1, u_2$ sînt variabile complexe. Dacă se utilizează o funcţie de transfer continuă $H(s)$, se obţine tot o funcţie de transfer continuă $H(g(s_1, s_2)), g(s_1, s_2)) = S$ ; aceasta poate fi transformată într-o funcţie de transfer discretă (de tipul $H(z_1, z_2)$), utilizînd tehnica transformărilor biliniare. O altă cale este aceea de a transforma o funcţie de transfer discretă $H(z)$, direct în $H(z_1, z_2)$ prin intermediul schimbării de variabile $g(z_1, z_2) = Z$.

B) A doua strategie implică transformarea unei funcţii 2D, $H(u_1, u_2)$ într-o altă funcţie 2D, $H[G_1(v_1, v_2), G_2(v_1, v_2)]$ prin schimbarea de variabile $G_1(v_1, v_2) = u_1$ ; $G_2(v_1, v_2) = u_2$, în care $v_1, v_2, u_1, u_2$ sînt variabile complexe, discrete sau continue (caz în care revenirea în discret se face tot prin intermediul transformărilor biliniare).

Vom analiza în continuare cîteva aspecte legate de utilizarea acestor strategii în sinteza sistemelor 2D.

A. Problema fundamentală din punct de vedere al sintezei este următoarea : să se sintetizeze o funcţie de transfer 1D, liniară, finită, invariantă, $H(s)$, şi apoi să se găsească o transformare spectrală, astfel încît răspunsul în amplitudine a lui $H(s_1, s_2)$, transformată în discret prin intermediul unei transformări biliniare, să aproximeze (pe baza unui indice de performanţă), caracteristica de amplitudine dorită (impusă). Întrucît sintetizarea lui $H(s)$ este cunoscută, importantă în acest algoritm este identificarea lui $g(s_1, s_2)$. Din cele menţionate anterior, rezultă că $g(s_1, s_2)$ trebuie să fie o funcţie raţională reală. Deoarece răspunsul în frecvenţă al unei funcţii de transfer continue $H(s_1, s_2)$ se obţine

prin înlocuirea $s_1 = j\omega_1, s_2 = j\omega_2$, se poate trage concluzia că $g$ trebuie să transforme axele imaginare ale planelor $s_1, s_2$ în totalitate, în toată axa imaginară a planului $S$, astfel încît pentru orice $\omega_1, \omega_2 \geqslant 0$, să existe un $\omega$ real și pozitiv, astfel încît

$$g(j\,\omega_1, j\omega_2) = j\omega$$

şi invers. În ceea ce priveşte stabilitatea, dacă $H(s)$ este stabilă, $H(s_1, s_2)$ este stabilă cînd $g(s_1, s_2)$ este stabilă. Notăm cu $k(\omega_1, \omega_2)$ funcția $\frac{1}{i}\, g(j\omega_1, j\omega_2)$. Presupunînd că sintetizăm un sistem continuu, rezultă că pentru un $\omega$ fixat, ecuația $K(\omega_1, \omega_2) = \omega$ descrie un vector (de $\omega = ct$) în planul $\omega_1, \omega_2$. În general, ținînd seama că sistemele fizice se caracterizează printr-o caracteristică de frecvență de tipul filtru, este posibil să se caracterizeze o transformare spectrală care să conserve aceste caracteristici. Deoarece sînt în domeniul continuu, domeniul de variație de interes pentru $\omega_1, \omega_2$ este $\Omega \in \mathbb{R}^2$, pentru care $\omega_1 \geqslant 0$; $\omega_2 \geqslant 0$, sau în domeniul $\Omega_I$ (o submulțime adecvată a lui $\Omega$) care conține originea. Următoarele teoreme arată în ce condiții prin transformarea spectrală se conservă spectrul lui $H(s)$.

**Teorema 4.1.** Fie $H(s)$ o funcție particulară, avînd un anumit spectru de amplitudine pe $[0, \omega_0]$; $\omega_0 > 0$. Atunci $H(g(s_1, s_2))$ are un spectru asemănător pe $\Omega_I$, dacă și numai dacă :

a) $k$ este continuă pe $\Omega_I$;

b) $k(0, 0) = 0$ și $[0, \omega_0] \subseteq k(\Omega_I) \stackrel{\Delta}{=} k(\widehat{\omega_1, \omega_2})$; $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_I$;

c) $k$ este o funcție pozitivă, monoton crescătoare pe $\Omega_I$, în fiecare variabilă.

**Teorema 4.2.** Fie $H(s)$ o funcție particulară, avînd un anumit tip de spectru ; $H(s_1, s_2)$ are același tip de spectru, dacă și numai dacă :

a) $k$ este continuă pe $\Omega_I$;

*b*) $k(0, 0) = 0$ ;

c) $k$ este o funcție pozitivă, monoton crescătoare pe $\Omega$, în fiecare variabilă, astfel încît :

$$\lim_{\omega_1 \to \infty} k(\omega_1, \omega_2) = \infty, \text{ pentru orice } \omega_2 < \infty$$

și

$$\lim_{\omega_2 \to \infty} k(\omega_1, \omega_2) = \infty, \text{ pentru orice } \omega_1 < \infty.$$

Demonstrația teoremelor poate fi găsită în [27], unde este prezentată, de asemenea, o clasă a funcțiilor $g(s_1, s_2)$, care îndeplinește $g(j\omega_1, j\omega_2) = j\omega$ și asigură condițiile teoremei.

În cazul în care se lucrează discret, deci pornind de la o funcție $H(z)$, care este transformată într-o funcție $H(z_1, z_2)$, prin intermediul lui $g(z_1, z_2)$, trebuie avute în vedere următoarele : Fie $D_1 = \{z ; z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$ și $D_2 = \{(z_1, z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, |z_1| \leqslant 1 ; |z_2| \leqslant 1\}$. Fie $F_{D_1}$ și $F_{D_2}$ frontierele domeniilor $D_1$ și $D_2$. Răspunsul în frecvență al unui sistem discret (1D sau 2D) se obține prin evaluarea funcției de transfer pe frontiere. Deoarece $g$ trebuie să conserve caracteristica în amplitudine, trebuie ca $g(F_{D_2}) = F_{D_1}$. În plus, pentru asigurarea stabilității, $g$ trebuie să fie ales astfel încît pentru oricare $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, să existe un $\omega > 0$, astfel încît :

$$g(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}) = e^{-j\omega}$$

sau

$$|g(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2})| = 1.$$



Scanned with OKEN Scanner

În această situație definim funcția $k(\omega_1, \omega_2)$,

$$k(\omega_1, \omega_2) = i \ln g(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}).$$

Exemple de funcții $g$ care îndeplinesc condițiile de mai sus sînt date în [51], [52]. În general, utilizarea acestor funcții conduce la probleme neliniare foarte complicate. În [77] se arată că singura clasă de funcții admisibile $g(z_1, z_2)$, pentru proiectarea sistemelor cauzale 2D, trebuie să fie de forma $z_1^r, z_2^t = z$, în care $r$, $t$ sînt pozitivi, reali, raționali. Astfel de funcții $g$ sînt totdeauna stabile și ușor implementabile. Teoremele enunțate anterior sînt valabile și în această situație.

B. Utilizarea celei de a doua strategii de proiectare este probabil cea mai convenabilă în cazul sistemelor 2D și constă în următoarele. Dîndu-se o funcție de transfer 2D, avînd un anumit spectru $H_1(v_1, v_2)$ să găsim o transformare $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$; cu $G=(G_1, G_2)$, $v_1=G_1(z_1, z_2)$, $v_2= G_2(z_1, z_2)$, $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$, astfel încît :

— dacă $H_1(v_1, v_2)$ este stabilă, $H_2[G_1(z_1, z_2), G_2(z_1, z_2)]$ să fie stabilă ;

— $G : F_{D_2} \to F_{D_2}$ ;

— pentru orice $\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0$, trebuie să existe $\omega_1, \omega_2 \geqslant 0$, astfel încît :

$$G_1(e^{-j\sigma_1}, e^{-j\sigma_2}) = e^{-j\omega_1},$$

$$G_2(e^{-j\sigma_1}, e^{-j\sigma_2}) = e^{-j\omega_2}.$$

sau

$$|G_i(e^{-j\sigma_1}, e^{-j\sigma_2})| = 1, i = 1, 2.$$

În ceea ce privește stabilitatea, în [52] se arată că dacă $H_1$ este stabilă, $H_2$ este stabilă, dacă și numai dacă $G_1$ și $G_2$ sînt stabile. O tabelare a funcțiilor $g$, $G_i$, care asigură transformările spectrale atît în cazul $A$, cît și în cazul $B$ se află în [51], [52].

## 4.3. Sinteza sistemelor 2D, bazată pe transformări omografice

În secțiunea 2.3.2 s-au analizat transformările biliniare, precum și modul în care se pot aplica sistemelor 2D.

Aceste transformări pot fi utilizate și ca procedee de sinteză, în sensul că funcția 2D dorită se sintetizează, presupunînd variabile $s_1$, $s_2$ continue și apoi se trece în discret printr-o dublă transformare biliniară. Sintetizarea în „continuu'' a unui sistem 2D este o problemă care poate fi rezolvată în majoritatea cazurilor, prin tehnici cunoscute din cazul sistemelor 1D. Trecerea în discret însă, ridică semne de întrebare în ceea ce privește asigurarea stabilității sistemului discret, obținut în final, deoarece nu orice polinom în continuu (numitorul unei fracții raționale continue), chiar dacă este stabil, generează prin transformare biliniară un polinom discret stabil (situație de altfel întîlnită și în cazul sistemelor 1D). În concluzie, este util să se cunoască care sînt aceste tipuri de polinoame. În literatura de specialitate conservarea stabilității este legată de existența la numitorul funcțiilor raționale continue a polinoamelor Hurwitz 2D.

*Definiția 4.1.* a) $B(s_1, s_2)$ este un polinom Hurwitz în sens larg (PHL), dacă $1/B(s_1, s_2)$ nu are nici o singularitate în domeniul

$$D = \{(s_1, s_2) ; \mathrm{Re}\, s_1 > 0, \mathrm{Re}\, s_2 > 0, |s_1| < \infty, |s_2| < \infty\}.$$

b) $B(s_1, s_2)$ este un polinom Hurwitz în sens restrîns (PHR), dacă $1/B(s_1, s_2)$ nu are nici o singularitate în :

$$D = \{(s_1, s_2) ; \operatorname{Re} s_1 > 0, \operatorname{Re} s_2 > 0, |s_1| < \infty, |s_2| < \infty\} \cup$$

$$\cup \{(s_1, s_2) ; \operatorname{Re} s_1 = 0, \operatorname{Re} s_2 > 0, |s_1| \leqslant \infty, |s_2| < \infty\} \cup$$

$$\cup \{(s_1, s_2) ; \operatorname{Re} s_1 > 0, \operatorname{Re} s_2 = 0, |s_1| < \infty, |s_2| \leqslant \infty\}.$$

c) $B(s_1, s_2)$ este un polinom Hurwitz strict (PHS), dacă $1/B(s_1, s_2)$ nu posedă nici o singularitate în :

$$D = \{(s_1, s_2) ; \operatorname{Re} s_1 \geqslant 0, \operatorname{Re} s_2 \geqslant 0, |s_1| < \infty, |s_2| < \infty\},$$

d) $B(s_1, s_2)$ este un polinom Hurwitz foarte strict (PHFS), dacă $1/B(s_1, s_2)$ nu posedă nici o singularitate în domeniul

$$D = \{(s_1, s_2) ; \operatorname{Re} s_1 \geqslant 0, \operatorname{Re} s_2 \geqslant 0, |s_1| \leqslant \infty, |s_2| \leqslant \infty\}.$$

Polinoamele (PHFS) se bucură de proprietăţi remarcabile din punct de vedere al stabilităţii sistemelor 2D continue.

**Teorema 4.3.** Fie $H(s_1, s_2) = A(s_1, s_2)/B(s_1, s_2)$ ; $H(s_1, s_2)$ nu posedă nici un fel de singularităţi în domeniul

$$D = \{(s_1, s_2) ; \operatorname{Re} s_1 \geqslant 0, \operatorname{Re} s_2 \geqslant 0, |s_1| \leqslant \infty, |s_2| \leqslant \infty\},$$

dacă şi numai dacă $B(s_1, s_2)$ este un PHFS.

**Teorema 4.4.** Fie $B(s_1, s_2)$ un PHFS de grad $n$ în $s_1$ şi $m$ în $s_2$. Fie $B(s_1, s_2) = Q_m(s_1)\, s_2^m + \ldots + Q_0(s_1) \in \mathbb{R}[s_1][s_2] = P_n(s_2)\, s_1^n + \ldots + P_0(s_2) \in \mathbb{R}[s_2][s_1]$. Atunci $B(s_1, s_2) \in \mathbb{R}[s_1][s_2]$ şi $B(s_1, s_2) \in \mathbb{R}[s_2][s_1]$ sînt polinoame PHS.

Demonstraţia teoremelor anterioare este prezentată în [27]. În ceea ce priveşte conservarea stabilităţii prin transformări biliniare, în literatura de specialitate nu s-a determinat care dintre cele 4 tipuri de polinoame Hurwitz este cel mai adecvat pentru a asigura atît condiţii necesare, cît şi suficiente (trebuie ca prin intermediul acestor transformări să nu se obţină funcţii de transfer discrete, raţionale, care prezintă singularităţi de ordinul 2, cele mai defavorabile din punct de vedere al stabilităţii). ■

Din lucrările consultate şi din exemplele testate de autori se poate trage concluzia că PHS asigură condiţiile necesare pentru stabilitate BIBO, iar cele de tip PHFS condiţiile suficiente.

# 5. EFECTE SPECIALE

Vom prezenta în continuare un aspect interesant — din punct de vedere al posibilelor aplicații viitoare — cel al prelucrării funcțiilor de transfer în z, aferente sistemelor liniare discrete 2D, și anume modul în care modificări ale coeficienților funcției de transfer a unui sistem discret 2D se reflectă în matricea de ieșire a acestuia. Rezultatele obținute sînt foarte promițătoare pentru tehnicile de prelucrare numerică a imaginilor.

Considerăm un sistem liniar discret 2D, caracterizat de următoarea funcție de transfer (standard):

$$H^*(z_1, z_2) = \frac{Y(z_1, z_2)}{U(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{m=0}^{M_a} \sum_{n=0}^{N_a} a_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n}}{\sum_{i=0}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}} \tag{5.1}$$

## 5.1. Influența coeficenților numitorului funcției de transfer asupra matricei de ieșire a sistemului

*Definiția 5.1.* Se definește „efect de lupă vertical de ordinul $k$" efectul obținut prin modificarea coeficienților numitorului lui $H^*(z_1, z_2)$, obținîndu-se un nou sistem liniar discret 2D, caracterizat de $H^*_m(z_1, z_2)$, astfel încît secvența de ieșire a noului sistem să satisfacă următoarele condiții:

a) $C_0^m = C_0$;

b) $C_{ki}^m = C_i$; $k$ = întreg, pozitiv, arbitrar, $i = 1, N$ (5.2)

unde: $C^m$ sînt coloanele matricei $Y^m(z_1, z_2)$,
$C$ sînt coloanele matricei $Y(z_1, z_2)$.

Dacă matricea $\{y_{i,j}\}$ are dimensiunile $M \times N$, atunci condițiile (5.2) sînt satisfăcute pentru $i = \overline{1, N}$ ($N$ reprezintă dimensiunea orizontală, iar $M$ reprezintă dimensiunea verticală).

*Definiția 5.2.* Se definește „efect de lupă orizontal de ordinul $k$" efectul obținut prin modificarea coeficienților numitorului lui $H^*(z_1, z_2)$, obținîndu-se

un nou sistem liniar discret 2D, caracterizat de $H_m^*(z_1, z_2)$, astfel încît secvenţa de ieşire a noului sistem să satisfacă următoarele condiţii :

$$\text{a) } L_0^m = L_0\,; \tag{5.3}$$

$$\text{b) } L_{kj}^m = L_j\,;\ k = \text{întreg, pozitiv, arbitrar,}\quad j = \overline{1,\ M}$$

unde $L^m$ sînt liniile matricei $Y^m(z_1, z_2)$,
$L$ sînt liniile matricei $Y(z_1, z_2)$.

*Definiţia 5.3.* Se defineşte ,,efect de lupă total de ordinul $k$'' efectul obţinut prin însumarea efectului de lupă orizontal de ordinul $k$ cu efectul de lupă vertical de ordinul $k$, astfel încît noua matrice de ieşire $\{y_{i,j}^m\}$ să satisfacă următoarea condiţie:

$$y_{ki,kj}^m = y_{i,j}\,;\ i = \overline{1,\ M},\ j = \overline{1,\ N},\ k = \text{întreg, pozitiv, arbitrar,} \tag{5.4}$$

unde $y_{\cdot\cdot}^m$ este un element al matricei $Y^m(z_1, z_2)$,
$y_{\cdot,\cdot}$ este un element al matricei $Y(z_1, z_2)$.

## 5.2. Influenţa coeficienţilor numărătorului funcţiei de transfer asupra matricei de ieşire a sistemului

*Definiţia 5.4.* Se defineşte ,,efect de contrast'' efectul care se obţine prin modificarea coeficienţilor numărătorului funcţiei de transfer $H^*(z_1, z_2)$, astfel încît să se obţină un nou sistem 2D, caracterizat printr-o funcţie de transfer $H_m^*(z_1, z_2)$; răspunsul noului sistem $Y^m(z_1, z_2)$ la aceeaşi matrice de intrare $U(z_1, z_2)$ ca la sistemul iniţial, are liniile (coloanele) amplificate (atenuate) faţă de liniile (coloanele) lui $Y(z_1, z_2)$.

Trebuie menţionat faptul că efectele de contrast pot fi obţinute într-o mare varietate — spre deosebire de efectele de lupă — şi ca atare prezentarea lor în totalitate ar presupune un spaţiu mult prea mare.

Rezultatele deduse din definiţiile date mai sus, cît şi exemplele de calcul pot fi găsite în [53], [54].

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA A II-A

# Analiza asistată de calculator a sistemelor 2D

## 1. ANALIZA ASISTATĂ DE CALCULATOR, PRIN SIMULARE, A SISTEMELOR

### 1.1. Considerații generale

Progresul științei și tehnicii s-a bazat și se bazează pe utilizarea creatoare a informațiilor obținute printr-o analiză aprofundată a realității înconjurătoare, a sistemelor de cele mai diverse tipuri care o compun. Unul dintre cele mai importante obiective ale analizei sistemelor îl constituie obținerea de informații cu privire la evoluția în timp, în condiții impuse, a mărimilor caracteristice sistemelor analizate. În numeroase cazuri aceste informații, denumite *date comportamentale*, se obțin ca rezultat al efectuării unuia sau mai multor *experimente* asupra sistemului analizat. Efectuarea unui experiment constă în crearea condițiilor impuse de necesitățile analizei și urmărirea evoluției sistemului (respectiv a mărimilor din sistem care prezintă interes pentru observator) pe un interval de timp finit, denumit *interval de observare.*

Tehnica de colectare a datelor comportamentale prin experimentare directă are o arie limitată de aplicabilitate. Dintre cauzele care împiedică efectuarea de experimente directe asupra sistemelor analizate menționăm :

— sistemul analizat nu are existență materială concretă — acesta este cazul sistemelor aflate în curs de proiectare ;

— trebuie analizată comportarea în situații limită a unor instalații sau echipamente foarte costisitoare sau dificil de procurat — în aceste cazuri experimentarea directă poate determina pagube deosebit de mari, prin deteriorarea sau distrugerea instalațiilor sau echipamentelor respective ;

— sistemul analizat are o dinamică foarte lentă, care implică o durată inadmisibil de mare a experimentelor directe ;

— se analizează un sistem care nu poate fi pus la dispoziția analistului pentru efectuarea de experimente directe — acesta este cazul unor instalații sau echipamente incluse într-un flux tehnologic care nu poate fi întrerupt.

În toate aceste cazuri apare necesitatea utilizării unui *model* al sistemului analizat. Este bine cunoscut faptul că modelul unui sistem oferă de regulă o imagine simplificată a acestuia, care reflectă relațiile existente între anumite mărimi caracteristice sistemului modelat. În limitele analogiilor existente între model și sistemul modelat, este posibil ca rezultatele obținute din analiza modelului să fie utilizate pentru a trage concluzii cu privire la anumite proprietăți ale sistemului. Se realizează astfel o analiză indirectă a sistemului studiat.

### 1.2. Modele matematice

În știință și tehnică se operează frecvent cu *modele matematice* ale sistemelor studiate. Corespondența dintre un sistem și modelul său matematic este asigurată prin asocierea cîte unei *variabile de descriere* fiecărei mărimi din sistem

și reprezentarea relațiilor dintre aceste mărimi prin relații matematice între variabilele de descriere corespunzătoare. În funcție de semnificația mărimilor din sistem, stabilită din punctul de vedere al interacțiunii sistem-mediu înconjurător, variabilele de descriere asociate sînt denumite variabile de *intrare, variabile de stare și variabile de ieșire*. Dintre modelele matematice devenite clasice menționăm ecuațiile și sistemele de ecuații diferențiale, relațiile de recurență, funcțiile de transfer.

Un sistem cu $n$ intrări și o ieșire, a cărui funcție intrare-ieșire este cunoscută, poate fi descris simplu astfel :

$$y = f(u_1, \dots, u_n),$$

unde variabilele $u_1, \dots, u_n$ și $y$ identifică mărimile de intrare și respectiv de ieșire, iar $f$ este identificatorul funcției ce descrie comportarea intrare-ieșire a sistemului.

În cazul în care funcția $f$ este predefinită, descrierea de mai sus constituie modelul matematic al sistemului considerat.

Sistemele a căror comportare intrare-ieșire este caracterizată de aceeași funcție $f$ formează o clasă, denumită **tip funcțional**. În numeroase cazuri în definiția funcției caracteristice unui tip funcțional intervin unul sau mai mulți *parametri*. Valorile concrete pe care le iau aceștia sînt specifice fiecărui sistem particular din cadrul tipului funcțional. În cazul în care un tip funcțional este caracterizat prin $m$ parametri, modelul matematic al unui sistem de acest tip are forma

$$y = f(u_1, \dots u_n, p_1, \dots, p_m), \tag{1.1}$$

unde $p_1, \dots, p_m$ sînt valorile particulare, specifice sistemului descris, ale celor $m$ parametri ai tipului funcțional.

În figura 1.1 este prezentat un model grafic echivalent cu modelul matematic (1.1). Datorită sugestivității lor, modelele grafice, denumite *schemebloc*, sînt utilizate foarte frecvent.

Se observă că modelul matematic (1.1) pune în evidență comportarea intrare-ieșire a sistemului modelat, fără a face referiri la variabilele de stare. El este satisfăcător pentru toate tipurile de sisteme în a căror caracterizare nu intervin mărimi de stare, denumite *tipuri funcționale instantanee*.

Sistemele a căror evoluție în timp este condiționată de stare sînt denumite sisteme cu memorie și sînt încadrate în *tipuri funcționale cu memorie*.

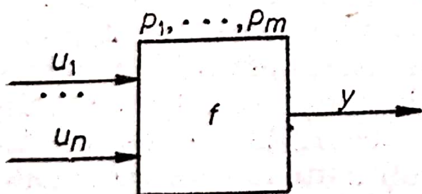


Fig. 1.1.

Funcția caracteristică unui astfel de tip funcțional se descompune de regulă în două funcții :

— *funcția de tranziție a stării*, care definește evoluția în timp a memoriei sistemelor de tipul respectiv ; aceasta este exprimată prin relația dintre valorile curente ale variabilelor de intrare și de stare și valorile imediat următoare ale variabilelor de stare ;

— *funcția de ieșire*, care definește relația dintre valorile curente ale variabilelor de stare și valoarea curentă a variabilei de ieșire.

Descrierea completă a sistemelor cu memorie trebuie să conțină și specificarea valorilor inițiale ale variabilelor de stare, denumite *condiții inițiale*. Deoarece numărul de condiții inițiale este același pentru toate sistemele de același tip, dar valorile condițiilor inițiale sînt specifice fiecărui sistem în parte,

rezultă că este posibilă tratarea condițiilor inițiale ca parametri ai tipurilor funcționale cu memorie. Această abordare creează posibilitatea descrierii unitare, sub forma (1.1), a tuturor tipurilor de sisteme, atît instantanee, cît și cu memorie.

Descrierea sistemelor complexe, formate din subsisteme interconectate, trebuie să includă, în afara descrierilor subsistemelor componente, specificarea relațiilor existente între ele. Acestea sînt relații de identitate între variabilele de intrare și, respectiv, de ieșire ale subsistemelor componente, așa cum reiese și din figura 1.2. Se observă că problema specificării relațiilor dintre subsisteme poate fi rezolvată simplu prin utilizarea unui identificator unic pentru variabilele identice. În acest caz descrierea sistemelor complexe se reduce la simpla enumerare a descrierilor subsistemelor componente.

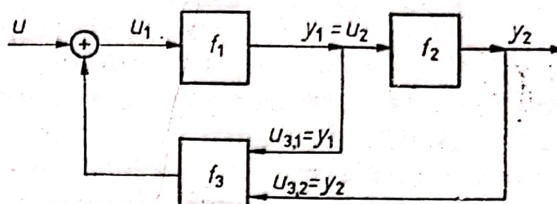



Fig. 1.2.

De exemplu, sistemul a cărui schemă-bloc este prezentată în figura 1.2 poate fi descris în modul următor :

$$u_1 = +(u, y_3),$$

$$y_1 = f_1(u_1),$$

$$y_2 = f_2(y_1),$$

$$y_3 = f_3(y_1, y_2)$$

(funcțiile cu identificatorii $+, f_1, f_2, f_3$ sînt considerate predefinite).

Se observă că din această descriere lipsește definiția variabilei de intrare $u$. Definind variabila de intrare se definește de fapt un *sistem generator* al acestei variabile. Funcția caracteristică unui sistem generator este în majoritatea cazurilor o funcție de timp, eventual cu unul sau mai mulți parametri. Rezultă că, pentru a determina răspunsul unui sistem la o anumită mărime de intrare, trebuie urmărită evoluția mărimii de ieșire a sistemului format prin conectarea în serie (ca în figura 1.3) a două sisteme — sistemul generator al variabilei de intrare și sistemul analizat.

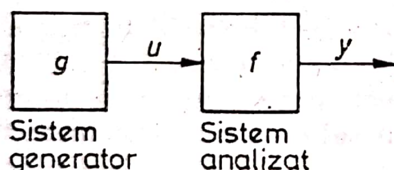



Fig. 1.3.

## 1.3. Modele de simulare

O dată cu dezvoltarea tehnicii de calcul, analiza sistemelor a devenit un domeniu de largă aplicare a acesteia. Una dintre tehnicile cel mai frecvent utilizate în prezent în analiza asistată de calculator a sistemelor este reprezentată de *simularea numerică*. Aceasta este o tehnică de analiză indirectă, care are ca obiectiv obținerea de date comportamentale cu privire la *modelele de simulare* ale sistemelor. Modelul de simulare descrie sistemul modelat în termenii specifici unui limbaj de programare pus la dispoziție de calculatorul numeric utilizat. Acest limbaj poate fi un limbaj universal (FORTRAN, Pascal etc.) sau un limbaj specializat, denumit *limbaj de simulare* (CSMP, GPSS etc.).



Scanned with OKEN Scanner

Modelul de simulare al unui sistem cu model matematic de forma (1.1) se obţine prin implementarea funcţiei caracteristice a sistemului în limbajul de programare (simulare) utilizat. În cazul în care funcţia respectivă este predefinită în limbaj, implementarea sa nu mai este necesară, iar descrierea modelului de simulare al sistemului se realizează chiar sub forma (1.1) sau într-o variantă a acesteia. Rezultă că o funcţie predefinită constituie modelul de simulare predefinit al unui tip funcţional. Un astfel de model de simulare poate fi reprezentat grafic printr-un bloc ca cel din figura 1.1. Pentru simplificarea prezentării, în cele ce urmează utilizăm denumirea de *tip de bloc* pentru orice reprezentare a modelului de simulare al unui tip funcţional predefinit şi, respectiv, *bloc* pentru orice reprezentare a unui sistem al cărui tip funcţional este predefinit. Aceste denumiri au fost preluate din domeniul simulării analogice, unde modelele de simulare predefinite sînt reprezentate de blocuri constructive ale calculatorului analogic (integratoare, potenţiometre etc.).

Limbajele de simulare predefinesc un număr limitat de tipuri de blocuri — cele frecvent întîlnite şi considerate tipice pentru domeniile spre care sînt orientate limbajele respective. Problema modelării într-un limbaj de simulare a unui sistem a cărui funcţie caracteristică nu face parte din categoria celor predefinite are două alternative de rezolvare :

— extinderea repertoriului funcţiilor (tipurilor de blocuri) predefinite; limbajele care permit adăugarea unor noi tipuri de blocuri sînt denumite limbaje de simulare *extensibile* ;

— descompunerea sistemului ce trebuie modelat într-un ansamblu de subsisteme interconectate, ale căror tipuri funcţionale sînt predefinite ; pe această cale se obţine un *model de simulare de tipul reţea* (notat prescurtat **m.s.r.**), format din ansamblul blocurilor care modelează subsistemele componente.

În limbajele de simulare descrierea unui m.s.r. se realizează de obicei printr-o succesiune de instrucţiuni/declaraţii, care definesc blocurile componente şi modul în care interacţionează acestea. Dintre convenţiile frecvent adoptate în limbajele de simulare menţionăm următoarele :

— fiecărui bloc i se asociază un *identificator distinct*, care identifică şi variabila de ieşire a blocului ; aceşti identificatori pot fi *numerici*, caz în care sînt denumiţi numere de identificare, sau *alfanumerici*, deci nume simbolice alese astfel încît să evidenţieze semnificaţia mărimilor de ieşire ale sistemelor modelate de blocuri ;

— tipurile de blocuri predefinite sînt identificate prin nume simbolice distincte, formate din unul sau mai multe caractere ;

— pentru definirea unui bloc se utilizează o declaraţie (instrucţiune) care, indiferent de sintaxa sa, trebuie să conţină următoarele informaţii :

— identificatorul blocului definit ;

— identificatorul tipului său ;

— identificatorii blocurilor conectate la intrările celui la care se referă declaraţia — se precizează astfel modul de interconectare a blocurilor din m.s.r. ;

— valorile parametrilor blocului.

Din punctul de vedere al utilizatorului uman descrierile m.s.r. prin succesiuni de declaraţii sînt mai puţin sugestive decît reprezentările grafice. De aceea în procesul comunicării între oameni se preferă adesea utilizarea schemelor-bloc. Cu privire la acest mod de reprezentare a m.s.r. menţionăm următoarele :

— forma simbolului grafic prin care se reprezintă un bloc din m.s.r. depinde de tipul blocului ; în cazurile în care forma simbolului grafic este aceeași pentru mai multe tipuri de blocuri, acestuia i se atașează și identificatorul tipului ;

— interacțiunile dintre blocuri se reprezintă prin arce (conexiuni) trasate între ieșirile și respectiv intrările blocurilor care interacționează ;

— acolo unde este cazul, simbolurilor grafice corespunzătoare blocurilor li se adaugă specificarea valorilor parametrilor și (sau) a identificatorilor variabilelor de intrare și de ieșire.

În tabelul 1.1 sînt prezentate cîteva tipuri de blocuri uzuale, care modelează sisteme frecvent întîlnite.

## 1.4. Experimente de simulare. Simulatoare

Modelul de simulare al unui sistem reprezintă un program de calcul al valorilor variabilelor de descriere asociate mărimilor caracteristice sistemului. Pentru a determina evoluția în timp a valorilor acestor variabile, calculul trebuie efectuat pentru un număr finit de valori consecutive ale variabilei timp. Se realizează astfel un *experiment de simulare* (notat prescurtat e.s)., a cărui *dinamică* este definită de modul în care evoluează variabila *timp*. Valorile pe care le ia variabila timp pe parcursul unui experiment de simulare sînt denumite în cele ce urmează *momente de calcul*. Mulțimea momentelor de calcul este notată

$$T = \{t_k,\ k = 0, \ldots, n\}$$

Uzual $T \subset \mathbb{R}$ sau $T \subset \mathbb{Z}$, după cum sistemele analizate prin simulare sînt sisteme continue sau sisteme discrete, iar $t_0 = 0$. Valorile extreme ale variabilei timp $[t_0, t_n]$ definesc *intervalul de observare* pe care se efectuează experimentul de simulare.

În cazul în care evoluția timpului în intervalul de observare considerat este definită de relația

$$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

valoarea $h$ este denumită *pasul experimentului de simulare*. În acest caz dinamica e.s. este definită de tripletul $(t_0, n, h)$ sau, echivalent, $(t_0, t_n, h)$. O definiție echivalentă cu (1.2) a dinamicii unui experiment de simulare este următoarea :

$$t_k = t_0 + k \cdot h, \qquad k = 0, \ldots, n \tag{1.3}$$

Se observă că valoarea $n$ precizează *numărul de pași* cu care avansează timpul în intervalul de observare pe care se efectuează experimentul de simulare.

Evoluția variabilelor de descriere din modelul de simulare pe parcursul execuției unui e.s. este definită prin secvențe de valori de lungime egală cu numărul de momente de calcul din intervalul de observare pe care se execută experimentul. Aceste secvențe reprezintă date comportamentale ce pot fi utilizate pentru a estima comportarea mărimilor corespunzătoare din sistemul



Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.1

| Tip, simbol grafic | Model matematic | Observații |
|---|---|---|
| Întîrziere de ordin $n$ | $y_k = \begin{cases} c_k, & k = 0, \dots, n-1 \\ y_{k-N}, & k \geqslant n \end{cases}$<br>$k$ — indice moment de calcul | Intrarea și ieșirea acestui tip de bloc pot fi notate și în unul dintre următoarele moduri:<br>*condiții inițiale* — *intrare* — *ieșire*<br>nule — $\begin{cases} u_k \\ U(z) \end{cases}$ — $u_{k-N}$; $z^{-N}\,U(z)$<br>nenule — $u_{k+n}$ — $u_k$ |
| Constantă | $y = p$ | Modelează sistemul generator de semnal treaptă de amplitudine p |
| Amplificator | $y = p \cdot u$ | |
| Sumator | $y = \sum_{i=1}^{n} (\pm u_i)$ | Valoarea maximă a numărului de intrări este *max*, dependentă de implementare ($max \geqslant 3$). Dacă trebuie calculată o sumă cu $n > max$, atunci se utilizează o cascadă de sumatoare. |
| Sumator ponderat | $y = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u_i$ | Dacă $n > max$ (*max*—număr maxim intrări), atunci se utilizează o cascadă de sumatoare ponderate. |
| Citire din fișier | $y_k = f_k$ | Valorile $\{f_k,\ k = 0, 1, \dots\}$ se citesc din fișierul secvențial cu identificatorul *idfis* |
| Scriere în fișier | $y_k = u_k$ | Valorile $\{y_k,\ k=0, 1, \dots\}$ se înregistrează în fișierul secvențial cu identificatorul *idfis*. |
| Translație (offset) | $y = u + p$ | |

modelat. În figura 1.4 este prezentat un exemplu de evoluţie a două variabile de descriere pe parcursul execuţiei unui e.s. a cărui dinamică este definită de tripletul (0, $n$, $h$).

Pentru ca analistul de sistem să poată utiliza rezultatele unui experiment de simulare este necesar ca acestea să fie înregistrate pe un suport extern, fie sub formă de tabel de valori, fie sub formă grafică. În funcţie de obiectivele urmărite în fiecare caz particular de analiză prin simulare numerică, înregistrarea rezultatelor se poate face la fiecare moment de calcul din intervalul de observare sau numai la anumite momente de calcul, pentru toate variabilele de descriere sau numai pentru o parte dintre acestea, denumite *variabile de interes*.

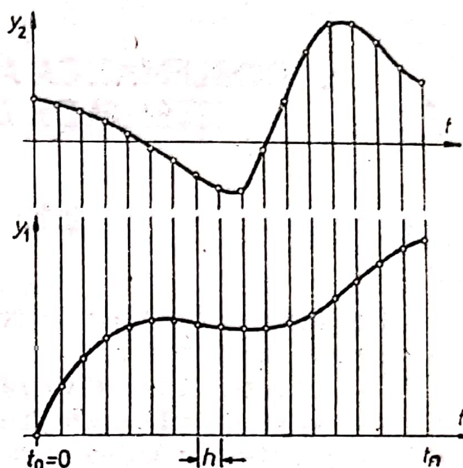


Fig. 1.4.

Rezultă că descrierea completă a unui e.s. are două componente principale :

— descrierea *modelului de simulare* al sistemului analizat ;

— descrierea *condiţiilor de desfăşurare* a experimentului de simulare, prin precizarea dinamicii sale şi respectiv a variabilelor de interes şi a modului de înregistrare a evoluţiei lor.

Forma concretă a descrierii unui e.s. şi efortul implicat de elaborarea acestei descrieri sînt condiţionate de particularităţile *sistemului analizat prin simulare, ale limbajului utilizat şi ale sistemului de calcul* pe care este implementat acesta. Evident, un limbaj este cu atît mai adecvat utilizării în simularea numerică, cu cît oferă mai multe facilităţi de descriere comodă, compactă şi flexibilă (uşor de modificat) a categoriei de e.s. pe care doreşte să le realizeze utilizatorul.

Programele care asigură execuţia efectivă a experimentelor de simulare, denumite *simulatoare*, constituie instrumente de lucru neapărat necesare pentru realizarea analizei asistate de calculator, prin simulare numerică, a sistemelor. Principalele funcţii ale unui simulator sînt următoarele :

— preluarea şi analiza descrierii modelelor de simulare ale sistemelor analizate ; simulatorul trebuie să semnaleze cu promptitudine eventualele erori sintactice şi (sau) semantice şi, în cazul în care operează în regim interactiv, să asigure facilităţi de corectare imediată a acestora :

— execuţia e.s. corect descrise.

În concluzie, analiza asistată de calculator, prin simulare, se realizează în trei mari etape : elaborarea descrierii experimentelor de simulare ce trebuie realizate, execuţia acestora utilizînd un simulator adecvat şi interpretarea rezultatelor obţinute prin simulare. Informaţiile obţinute prin simulare despre un sistem în curs de proiectare şi corect modelat pot fi utilizate pentru a determina valorile optime ale unor parametri ai sistemului respectiv. Rezultă deci că simularea reprezintă nu numai o tehnică de analiză, ci şi una de *proiectare asistată de calculator a sistemelor*.

# 2. PROBLEMATICA ANALIZEI PRIN SIMULARE NUMERICĂ A SISTEMELOR DISCRETE BIDIMENSIONALE (2D)

## 2.1. Considerații generale

Conform definițiilor introduse în prima parte a lucrării, un sistem 2D este caracterizat prin:

— secvența 2D de intrare $\{u_{m,n}\}$, de dimensiuni $M$, $N$;
— secvența 2D de ieșire $\{y_{m,n}\}$, de aceleași dimensiuni;
— funcția de transfer a sistemului 2D,

$$H(z_1, z_2) = \frac{Y(z_1, z_2)}{U(z_1, z_2)}, \tag{2.1}$$

unde $U(z_1, z_2)$, $Y(z_1, z_2)$ sînt transformatele z-2D ale secvențelor de intrare și, respectiv, de ieșire.

Funcția de transfer a sistemului 2D este de forma

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)}, \tag{2.2}$$

unde

$$A(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j}\, z_1^{-i}\, z_2^{-j},$$

$$B(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j}\, z_1^{-i}\, z_2^{-j},$$

cu $Ma \leqslant Mb$, $Na \leqslant Nb$ și $b_{0,0} = 1$.

*Observații.* **1.** Situațiile în care $b_{0,0} \neq 1$, $\wedge\, b_{0,0} \neq 0$ pot fi rezolvate prin împărțirea cu $b_{0,0}$ a tuturor coeficienților $a_{i,j}$, respectiv $b_{i,j}$.

**2.** Funcțiile de transfer cu $Ma < Mb$ și (sau) $Na < Nb$ sînt cazuri particulare ale celui cu $Ma = Mb$ și $Na = Nb$. În aceste cazuri particulare matricea de coeficienți $\{a_{i,j}\}$ are proprietatea

$$a_{i,j} = 0, \text{ pentru } i \in (Ma, Mb] \text{ sau } j \in (Na, Nb].$$

De aceea în cele ce urmează se consideră numai cazul

$$\begin{cases} Ma = Mb, \\ Na = Nb, \end{cases}$$

iar acolo unde este necesar se fac referiri explicite la influenţa anulării unor coeficienţi.

Din (2.1) şi (2.2) rezultă relaţia

$$Y(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} a_{i,j}\, z_1^{-i}\, z_2^{-j}\, U(z_1, z_2) - \sum_{\substack{i=0\\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j}\, z_1^{-i}\, z_2^{-j}\, Y(z_1, z_2), \qquad (2.3)$$

care constituie transformata $z$ 2D a relaţiei de recurenţă 2D

$$y_{m,n} = \sum_{i=0}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} a_{i,j}\, u_{m-i,n-j} - \sum_{\substack{i=0\\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j}\, y_{m-i,n-j} = \qquad (2.4)$$

$$= a_{0,0}\, u_{m,n} + \sum_{\substack{i=0\\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} (a_{i,j}\, u_{m-i,n-j} - b_{i,j}\, y_{m-i,n-j}), \qquad (2.5)$$

unde

$$(m - i < 0) \vee (n - j < 0) \Rightarrow \begin{cases} u_{m-i,n-j} = 0, \\ y_{m-i,n-j} = 0. \end{cases}$$

Funcţia de transfer (2.2) şi relaţia de recurenţă (2.4) reprezintă modele matematice *echivalente* ale unui sistem 2D.

Analiza asistată de calculator, prin simulare numerică, a unui sistem 2D pune problema determinării răspunsului acestuia la diferite secvenţe 2D de intrare, deci a calculului valorilor din secvenţa 2D de ieşire, conform specificării furnizate de un model matematic al sistemului analizat. Datorită modului de lucru al calculatoarelor numerice monoprocesor, aceste valori nu pot fi determinate decît *strict secvenţial*, ceea ce înseamnă că, din punctul de vedere al calculului, secvenţa 2D este tratată ca secvenţă 1D (şir de valori). Calculul fiecărei valori în parte implică execuţia unei secvenţe de operaţii, care implementează un model 1D al sistemului 2D analizat.

De asemenea, valorile din secvenţa 2D de intrare sînt generate tot ca secvenţă 1D, fie prin citire de pe un suport extern, fie prin execuţia unui algoritm de calcul specific.

Rezultă că în simularea numerică a sistemelor 2D se operează cu modele unidimensionale ale sistemelor analizate şi ale intrărilor şi ieşirilor acestora. Aceste modele unidimensionale sînt denumite în cele ce urmează **proiecţii 1D.**

Principalele etape ale analizei prin simulare numerică a sistemelor 2D, prezentate şi în figura 2.1, sînt următoarele :

— *elaborarea modelului de simulare al sistemului 2D analizat*; acesta reprezintă de fapt modelul de simulare al unei proiecţii 1D a modelului sistemului 2D ;

— *generarea proiecţiei 1D a intrării* sistemului 2D analizat; această prelucrare, denumită şi *conversie 2D-1D* sau *conversie de intrare*, are ca obiectiv generarea secvenţei 1D adecvată prelucrării de către modelul de simulare al sistemului 2D analizat;

— *execuţia experimentelor de simulare* asupra modelelor de simulare ale sistemelor 2D, cărora li se aplică la intrare proiecţiile intrărilor 2D. Ca rezultat



Scanned with OKEN Scanner

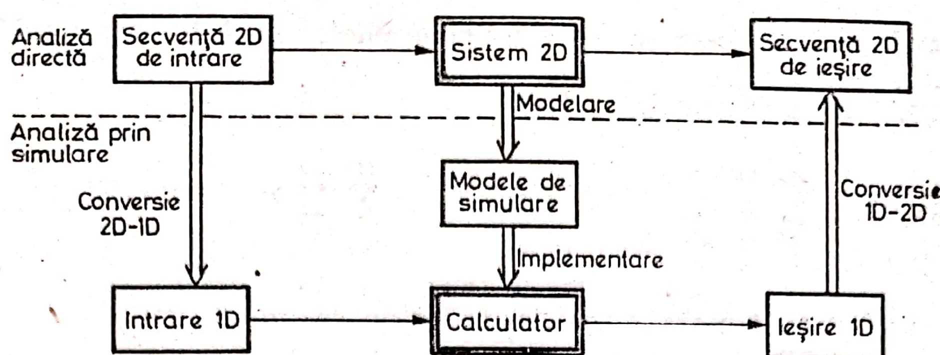



Fig. 2.1.

al experimentelor de simulare se obțin secvențe 1D, reprezentînd proiecții ale ieșirilor sistemelor 2D asupra cărora se efectuează analiza prin simulare;

— *transformarea secvențelor 1D obținute prin simulare* în secvențe 2D, care reprezintă rezultatul final al analizei prin simulare numerică a comportării sistemelor 2D. Această prelucrare este denumită *conversie 1D—2D* sau *conversie de ieșire*.

Se poate observa că pentru realizarea analizei asistate de calculator, prin simulare, a sistemelor discrete bidimensionale, poate fi utilizat un simulator de sisteme discrete unidimensionale. Aceasta deoarece modelele de simulare ale sistemelor 2D sînt modele de simulare ale proiecțiilor 1D, deci modele unidimensionale. În cazul în care există un simulator de sisteme discrete 1D, el se constituie ca primă componentă a unui pachet de programe destinat analizei asistate de calculator a sistemelor 2D. Acesta trebuie dezvoltat prin adăugarea de noi componente, care să ofere asistență pentru realizarea celorlalte prelucrări specifice analizei prin simulare a sistemelor 2D — pregătirea modelelor de simulare, conversiile 2D—1D și, respectiv, 1D—2D.

## 2.2. Proiecții unidimensionale ale secvențelor 2D

În prelucrarea asistată de calculator a secvențelor 2D se poate opera cu mai multe tipuri de proiecții unidimensionale. Acestea sînt secvențe 1D (cu un singur indice), în care valorile din secvențele 2D corespunzătoare apar într-o ordine dictată de tipul proiecției. Dimensiunea unei proiecții unidimensionale este condiționată atît de tipul său, cît și de dimensiunile secvenței 2D, notate $M$ și $N$.

Reamintim că transformata z—2D a unei secvențe $\{u_{m,n}\}$ de dimensiuni $M$, $N$ este

$$U(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j}\, z_1^{-i}\, z_2^{-j} \tag{2.6}$$

### 2.2.1. Proiecția verticală

Acest tip de proiecție, notată

$$\mathfrak{P}^v\{u_{m,n}\} = \{u_k^v\}$$

sau

$$\mathfrak{P}^v\{U(z_1, z_2)\} = U^v(z),$$

se obține prin concatenarea coloanelor secvenței 2D $\{u_{m,n}\}$, deci are dimensiunea

$$L = M \cdot N$$

și structura

$$\{\underbrace{u_{0,0}\ u_{1,0}\ \ldots\ u_{M-1,0}}_{\text{coloana } 0}\ \underbrace{u_{0,1}\ u_{1,1}\ \ldots\ u_{M-1,1}}_{\text{coloana } 1}\ \ldots\ \underbrace{u_{0,N-1}\ \ldots\ u_{M-1,N-1}}_{\text{coloana } N-1}\}$$

Rezultă că

$$u^v_{i+jM} = u_{i,j},\ i = 0, \ldots, M-1,\ j = 0, \ldots, N-1 \tag{2.7}$$

Transformata $z$ a secvenței $\{u^v_k\}$ este

$$U^v(z) = \sum_{k=0}^{L-1} u^v_k z^{-k} = \sum_{i=0}^{M-1} u^v_i z^{-i} +$$

$$+ z^{-M} \sum_{i=0}^{M-1} u^v_{i+M} z^{-i} + \ldots + z^{-(N-1)M} \sum_{i=0}^{M-1} u^v_{i+(N-1)M} z^{-i} = \tag{2.8}$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} z^{-jM} \sum_{i=0}^{M-1} u^v_{i+jM} z^{-i} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u^v_{i+jM} z^{-i} z^{-jM}$$

Din (2.7) și (2.8) rezultă că

$$U^v(z) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z^{-i} z^{-jM} \tag{2.9}$$

și, respectiv,

$$U^v(z) = U(z, z^M)$$

deci $U^v(z)$ poate fi obținută direct din $U(z_1, z_2)$ efectuînd substituțiile

$$\begin{cases} z_1 = z, \\ z_2 = z^M \end{cases}$$

## 2.2.2. Proiecția orizontală

Proiecția orizontală, notată

$$\mathcal{P}^o\{u_{m,n}\} = \{u^o_k\}$$

sau

$$\mathcal{P}^o\{U(z_1, z_2)\} = U^o(z),$$

se obține prin concatenarea liniilor secvenței 2D $\{u_{m,n}\}$; secvența 1D rezultantă are $L = M \cdot N$ elemente, cu proprietatea

$$u^o_{iN+j} = u_{i,j},\ i = 0, \ldots, M-1,\ j = 0, \ldots N-1 \tag{2.10}$$



Scanned with OKEN Scanner

Transformata $z$ a secvenţei $\{u_k^o\}$ este

$$U^o(z) = U(z^N, z)$$

(demonstraţia este similară cu cea din cazul proiecţiei verticale).

### 2.2.3. Proiecţia bidirecţională

Proiecţia bidirecţională, notată

$$\mathfrak{P}^b\{u_{m,n}\} = \{u_k^b\}$$

sau

$$\mathfrak{P}^b\{U(z_1, z_2)\} = U^b(z),$$

se defineşte numai pentru $M$, $N$ — relativ prime; aceasta este o secvenţă de lungime

$$NT = (M-1)N + M(N-1) + 1,$$

cu proprietatea

$$u^b_{iN+jM} = u_{i,j}, \; i = 0, 1, \ldots, M-1, \; j = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (2.11)$$

O astfel de secvenţă poate fi construită numai dacă $M$ şi $N$ sînt relativ prime, deoarece numai în acest caz funcţia

$$\Theta : [0, M-1] \times [0, N-1] \to [0, NT-1],$$

$$\Theta(i, j) = iN + jM$$

este injectivă.

Funcţia $\Theta$ nu este surjectivă, deci proprietatea (2.11) se referă numai la cele $M \cdot N$ elemente ale secvenţei $\{u_k^b\}$ ale căror indici fac parte din mulţimea

$$S_{M,N} = \mathrm{Im}\,\Theta = \{iN + jM \mid i = 0, 1, \ldots, M-1, j = 0, 1, \ldots, N-1\}. \qquad (2.12)$$

Mulţimea $S_{M,N}$ este denumită *mulţimea indicilor valorilor semnificative* din $\{u_k^b\}$, sau *mulţimea indicilor semnificativi* din $\{u_k^b\}$. Ordonînd strict crescător elementele mulţimii $S_{M,N}$, obţinem

$$S_{M,N} = \{m_g \mid m_g = iN + jM, \; i = 0, 1, \ldots, M-1, \; j = 0, 1, \ldots, N-1, \; m_0 = 0, \; m_{g-1} < m_g, \; g = 1, 2, \ldots, L-1\}, \text{ unde } L = M \cdot N \qquad (2.12\text{ a})$$

*Tabelul 2.1*

| i \ j | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 6 | 9 |
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |
| 2 | 8 | 11 | 14 | 17 |

De exemplu, proiecţia bidirecţională a unei secvenţe 2D de dimensiuni

$$M = 3, \; N = 4$$

are lungimea

$$NT = (2)\cdot 4 + 3\cdot(3) + 1 = 18.$$

Valorile indicilor semnificativi sînt în acest caz cele din tabelul 2.1.



Scanned with OKEN Scanner

Secvența $\{u_k^b\}$ este organizată după cum urmează:

| $k$ | $u_k^b$ |
|---|---|
| $0 = m_0$ | $u_{0,0}$ |
| 1 | — |
| 2 | — |
| $3 = m_1$ | $u_{0,1}$ |
| $4 = m_2$ | $u_{1,0}$ |
| 5 | — |
| $6 = m_3$ | $u_{0,2}$ |
| $7 = m_4$ | $u_{1,1}$ |
| $8 = m_5$ | $u_{2,0}$ |
| $9 = m_6$ | $u_{0,3}$ |
| $10 = m_7$ | $u_{1,2}$ |
| $11 = m_8$ | $u_{2,1}$ |
| 12 | — |
| $13 = m_9$ | $u_{1,3}$ |
| $14 = m_{10}$ | $u_{2,2}$ |
| 15 | — |
| 16 | — |
| $17 = m_{11}$ | $u_{2,3}$ |

Unei secvențe 2D $\{u_{m,n}\}$ îi corespund o infinitate de proiecții bidirecționale, care diferă prin valorile elementelor cu indici din mulțimea

$$R_{M,N} = \{k \mid k = 0, \ldots, NT\} \setminus S_{M,N} = \bigcup_{g=1}^{L-1} \{k \mid k \in (m_{g-1}, m_g)\}, \qquad (2.13)$$

denumită *mulțimea indicilor valorilor nesemnificative* din $\{u_k^b\}$.

Analizînd proiecția bidirecțională a unei secvențe 2D de dimensiuni $M$, $N$ — relativ prime se observă următoarele:

**1.** Valorile din aceeași linie (coloană) a secvenței 2D ocupă poziții echidistante în cadrul proiecției bidirecționale — indicii lor formează o progresie aritmetică cu rația $M$ și, respectiv, $N$.

**2.** Numărul valorilor nesemnificative este

$$NR = NT - M \cdot N = (M-1)(N-1).$$

Aceste valori sînt amplasate printre primele $NR$ și respectiv ultimele $NR$ valori din proiecția bidirecțională.

Figura 2.2 pune în evidență relațiile existente între valorile $i, j, k, \in \mathbb{Z}$, $k = iN + jM$.

**Lema 2.1.** Fie $p$ și $q$ două valori întregi care satisfac relația

$$(p \in [-M+1, -1] \wedge q \in [0, N-1]) \vee (p \in [0, M-1] \wedge q \in [-N+1, -1]) \qquad (2.14)$$

Valoarea

$$k = pN + qM$$

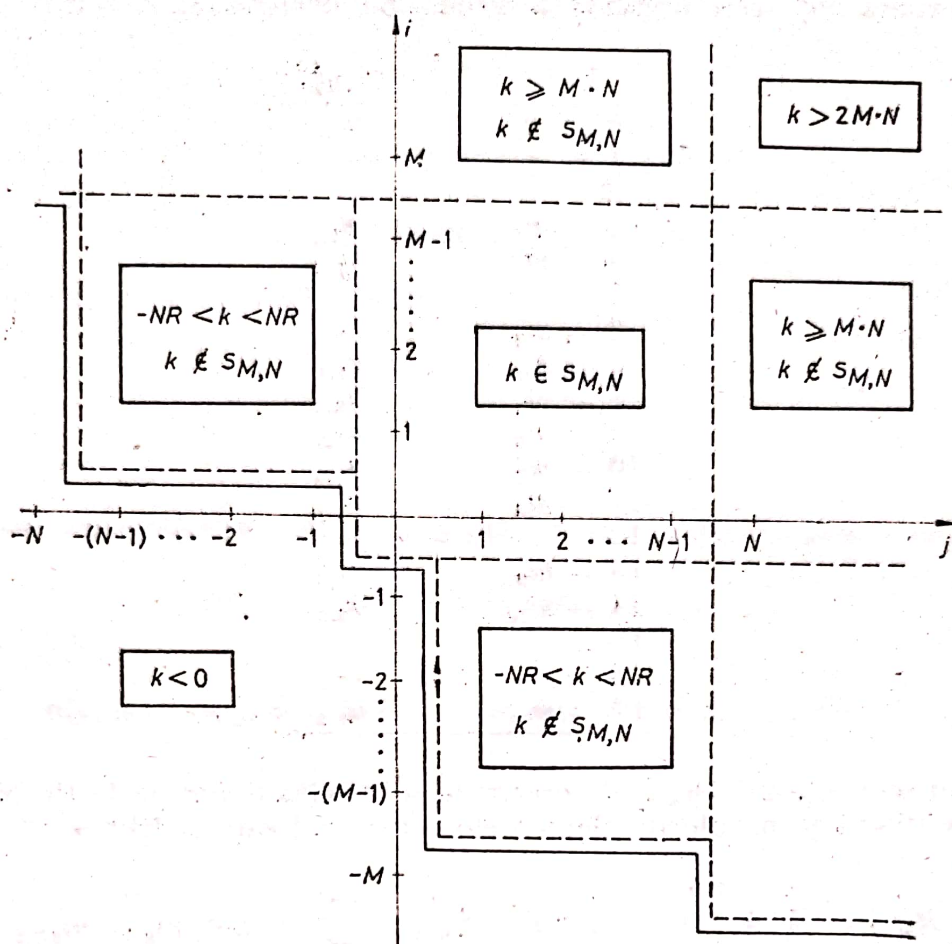



**Fig. 2.2.**

are următoarele proprietăţi :

$$\text{a) } k \in (-NR,\ NR);$$

$$\text{b) } k > 0 \Rightarrow k \in R_{M,N}$$

*Demonstraţie. a)* Să considerăm cazul

$$p \in [-M+1,\ -1] \wedge q \in [0,\ N-1].$$

În acest caz valorile extreme ale lui $k$ sînt

$$k_{min} = (-M+1)\,N + 0 \cdot M = -(M-1)\,N > -NR,$$

$$k_{max} = -N + (N-1)\,M = (M-1)\,(N-1) - 1 < NR.$$

Pentru $p \in [0,\ M-1] \wedge q \in (-N+1,\ -1]$ se obţin

$$k_{min} = 0 \cdot N + (-N+1)\,M = -(N-1)\,M > -NR,$$

$$k_{max} = (M-1)\,N - M = (M-1)\,(N-1) - 1 < NR.$$



Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că proprietatea $a$) este adevărată.

$b$) Presupunem $k \in S_{M,N}$, deci există

$$i \in [0, M-1] \wedge j \in [0, N-1],$$

astfel încît

$$k = iN + jM.$$

Dar

$$k = pN + qM,$$

ceea ce implică

$$(i-p)\, N = -(j-q)\, M.$$

Deoarece $M$ şi $N$ sînt relativ prime, egalitatea anterioară implică

$$i - p = xM \wedge q - j = yN.$$

*Cazul 1:* $p \in [-M+1, -1] \wedge q \in [0, N-1]$.
În acest caz

$$i - p \in [1, 2M-2] \Rightarrow x = 1$$
$$\Rightarrow (q-j)\, M = M \cdot N$$
$$\Rightarrow q = N + j \geqslant N,$$

ceea ce contrazice ipoteza $q \in [0, N-1]$

Deci $k \notin S_{M,N}$, ceea ce implică

$k \in R_{M,N}$.

*Cazul 2:* $p \notin [0, M-1] \wedge q \in [-N+1, -1]$

Se tratează analog cu cazul 1.

În cele ce urmează utilizăm notaţiile

$$\left.\begin{array}{l} R^1_{M,N} = \{k \mid k \in R_{M,N}\ k < NR\}, \\ R^2_{M,N} = R_{M,N} \setminus R^1_{M,N}. \end{array}\right\} \qquad (2.15)$$

Cu aceste notaţii *lema 2.1 se reformulează* astfel: valoarea $k = pN + qM$, unde $p$, $q$ satisfac (2.14) are următoarele proprietăţi:

a) $k \in (-NR, NR)$,

b) $k > 0, \Rightarrow k \in R^1_{M,N}$.

**Lema 2.2.** Fie

$$k = pN + qM,$$

unde $p$ şi $q$ satisfac relaţia (2.14),

$$m_g = iN + jM \in S_{M,N},$$

$$d = k - m_g = (p-i)\, N + (q-j)\, M.$$



Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții

$$d > 0 \Rightarrow d \in R^1_{M,N}.$$

*Demonstrație*

*Cazul 1.* $p \in [-M+1, -1] \wedge q \in [0, N-1]$.

În acest caz

$$(p-i) \in [-2M+2, -1] \wedge (q-j) \in [-N+1, N-1].$$

Deoarece interesează numai cazul $d > 0$, rezultă că trebuie luată în considerare numai situația în care

$$(q-j) \in [0, N-1].$$

Să observăm că pentru $(p-i) \in [-2M+2; -M]$,

$$d \leqslant -M \cdot N + (N-1) M = -M < 0,$$

deci prezintă interes numai cazul $(p-i) \in [-M+1, -1]$. S-a ajuns deci la valori

$$p' = (p-i),$$

$$q' = (q-j),$$

care satisfac relația (2.14), deci, conform lemei 2.1,

$$d \in R^1_{M,N}.$$

*Cazul 2.* $p \in [0, M-1] \wedge q \in [-N+1, -1]$.

Se tratează similar cu cazul 1.

**Lema 2.3.** Fie

$$m_{g_1} = i_1 N + j_1 M \in S_{M,N},$$

$$m_{g_2} = i_2 N + j_2 M \in S_{M,N};$$

$$m_{g_1} > m_{g_2},$$

$$d = m_{g_1} - m_{g_2} = (i_1 - i_2) N + (j_1 - j_2) M.$$

În acest caz

$$d \in S_{M,N} \vee d \in R^1_{M,N}.$$

*Demonstrație*

Se observă că

$$d = pN + qM,$$

unde $p = i_1 - i_2 \in [-M+1, M-1]$,

$q = j_1 - j_2 \in [-N+1, N-1]$.

Deoarece $m_{g_1} > m_{g_2}$, deci $d > 0$, valorile $p$ și $q$ nu pot fi simultan negative.



Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care

$$p \in [0, M-1] \wedge q \in [0, N-1],$$

rezultă

$$d \in S_{M,N}.$$

A mai rămas de analizat cazul

$$(p \in [-M+1, -1] \wedge q \in [0, N-1]) \vee (p \in [0, M-1] \wedge q \in [-N+1, -1])$$

caz în care, conform lemei 2.1,

$$d > 0 \Rightarrow d \in R^1_{M,N}.$$

### 2.2.4. Proiecţia standard

Acest tip de proiecţie, notată

$$\mathfrak{P}^s\{u_{m,n}\} = \{u^s_k\}$$

sau

$$\mathfrak{P}^s\{U(z_1, z_2)\} = U^s(z),$$

este o *proiecţie bidirecţională* cu proprietatea

$$k \in R^1_{M,N} \Rightarrow u^s_k = 0. \tag{2.16}$$

Transformata $z$ a proiecţiei standard este

$$U^s(z) = \sum_{k=0}^{NT} u^s_k z^{-k}. \tag{2.17}$$

Deoarece conform relaţiilor (2.13) şi (2.15)

$$S_{M,N} \cup R^1_{M,N} \cup R^2_{M,N} = \{k \mid k = 0, \ldots, NT\},$$

unde $S_{M,N}$, $R^1_{M,N}$, $R^2_{M,N}$ sînt mulţimi distincte, rezultă că (2.17) se rescrie sub forma

$$U^s(z) = U^S(z) + U^{R^1}(z) + U^{R^2}(z),$$

unde

$$U^S(z) = \sum_{k \in S_{M,N}} u^s_k z^{-k},$$

$$U^{R^1}(z) = \sum_{k \in R^1_{M,N}} u^s_k z^{-k},$$

$$U^{R^2}(z) = \sum_{k \in R^2_{M,N}} u^s_k z^{-k}.$$

Dar, conform cu (2.16), obținem

$$U^{R^1}(z) = 0.$$

De asemenea, după cum se va vedea în paragrafele următoare, $U^{R^2}(z)$ nu prezintă interes din punctul de vedere al analizei prin simulare a sistemelor 2D și valorile elementelor din mulțimea $\{u_k^s | k \in R^2_{M,N}\}$ nu afectează rezultatele experimentelor de simulare. De aceea, prin convenție, în cele ce urmează ignorăm $U^{R^2}(z)$ și considerăm

$$U^s(z) = U^S(z),$$

de unde, aplicînd (2.11) și (2.12), obținem

$$U^s(z) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z^{-iN-jM} = U(z_1, z_2). \tag{2.18}$$

Se constată că $U^s(z)$ se poate obține direct din $U(z_1, z_2)$, efectuînd substituțiile

$$\begin{cases} z_1 = z^N, \\ z_2 = z^M. \end{cases}$$

Expresia proiecției standard $U^s(z)$, de forma (2.18), poate fi rescrisă sub una dintre următoarele forme echivalente:

**a.**
$$U^s(z) = \sum_{i=0}^{M-1} \left( z^{-iN} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z^{-jM} \right) =$$

$$= P_0(z) + z^{-N}(P_1(z) + z^{-N}(\ldots (P_{M-2}(z) + z^{-N} P_{M-1}(z)) \ldots)), \tag{2.19}$$

unde

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z^{-jM}, \quad i \in [0, M-1].$$

**b.**
$$U^s(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \left( z^{-jM} \sum_{i=0}^{M-1} u_{i,j} z^{-iN} \right) =$$

$$= Q_0(z) + z^{-M}(Q_1(z) + z^{-M}(\ldots (Q_{N-2}(z) + z^{-M} Q_{N-1}(z)) \ldots )), \tag{2.20}$$

unde

$$Q_j(z) = \sum_{i=0}^{M-1} u_{i,j} z^{-iN}, \quad j \in [0, N-1].$$

**c.**
$$U^s(z) = \sum_{g=1}^{L-0} u_{m_g} z^{-m_g} \tag{2.21}$$

unde $m_g \in S_{M,N}$, $g = 0, \ldots, L-1$, $L = M \cdot N$.

## 2.3. Proiecții 2D ale secvențelor 1D

Toate tipurile de proiecții unidimensionale ale secvențelor 2D sînt inversabile — orice secvență 2D poate fi sintetizată (reconstituită) dacă se cunoaște o proiecție 1D a acesteia și tipul respectivei proiecții.

Fie

$$\{u_k^*\} = \mathfrak{P}^*\{u_{m,n}\}$$

o proiecție unidimensională a secvenței 2D $\{u_{m,n}\}$, unde caracterul $*$ indică tipul proiecției:

$$* = \begin{cases} v \to \text{proiecție } \textit{verticală}, \\ o \to \text{proiecție } \textit{orizontală}, \\ b \to \text{proiecție } \textit{bidirecțională}. \end{cases}$$

Proiecția 2D, de tipul indicat de $*$, a secvenței $\{u_k^*\}$ se notează $\mathfrak{B}^*\{u_k^*\}$. Aceasta are proprietatea

$$\mathfrak{B}^*\{\mathfrak{P}^*\{u_{m,n}\}\} = \{u_{m,n}\}. \tag{2.22}$$

Dacă se operează cu transformata $*$, atunci utilizăm notația $\mathfrak{P}^*\{U^*(z)\}$, iar proprietatea (2.22) se rescrie astfel:

$$\mathfrak{B}^*\{\mathfrak{P}^*\{U(z_1, z_2)\}\} = U(z_1, z_2). \tag{2.23}$$

Proiecția 2D bidirecțională are de asemenea proprietatea

$$\mathfrak{B}^b\{\mathfrak{P}^s\{u_{m,n}\}\} = \{u_{m,n}\} \tag{2.24}$$

sau

$$\mathfrak{B}^b\{\mathfrak{P}^s\{U(z_1, z_2)\}\} = U(z_1, z_2). \tag{2.25}$$

Aceasta deoarece proiecția 1D standard a unei secvențe 2D $\{u_{m,n}\}$ este un caz particular de proiecție 1D bidirecțională, cu proprietatea

$$u^s_{iN+jM} = u^b_{iN+jM} = u_{i,j},\ i = 0, \ldots, M-1;\ j = 0, \ldots, N-1.$$

## 2.4. Proiecții unidimensionale ale modelelor sistemelor 2D

Proiecțiile unidimensionale ale modelelor sistemelor bidimensionale se reprezintă fie printr-o *funcție de transfer* 1D, fie printr-o *relație de recurență* echivalentă. În cazul în care modelul matematic al sistemului este o funcție de transfer 2D, notată ca în § 2.1, forma funcțională a proiecțiilor 1D ale modelului se

obține simplu, efectuînd aceleași tipuri de substituții ca pentru obținerea proiecțiilor 1D ale secvențelor 2D. Aceste substituții sînt

$$\begin{cases} z_1 = z^q, \\ z_2 = z^p, \end{cases}$$

unde valorile $q$ și $p$ sînt condiționate de tipul proiecției astfel

$$\text{proiecție} \begin{cases} \text{verticală} \Rightarrow q = 1 \wedge p = M, \\ \text{orizontală} \Rightarrow q = N \wedge p = 1, \\ \text{bidirecțională} \Rightarrow q = N \wedge p = M \end{cases} \tag{2.26}$$

($M$, $N$ reprezintă dimensiunile secvențelor 2D de intrare și de ieșire).

În cazul general forma funcțională a proiecțiilor 1D ale modelelor sistemelor 2D se reprezintă astfel:

$$\mathfrak{L}^*\{H(z_1, z_2)\} = H^*(z) = H(z^q, z^p) = \frac{\sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j} z^{-i \cdot q - j \cdot p}}{\sum_{i=0}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j} z^{-i \cdot q - j \cdot p}}. \tag{2.27}$$

Forma recurentă a proiecțiilor 1D, *echivalentă* cu cea funcțională, este următoarea:

$$y_k^* = \sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j} u_{k-i \cdot q - j \cdot p}^* - \sum_{\substack{i=0 \\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j} y_{k-i \cdot q - j \cdot p}^*, \tag{2.28}$$

unde, conform definițiilor proiecțiilor 1D ale secvențelor 2D,

$$u_{m \cdot p + n \cdot q}^* = u_{m,n}; \; m = 0, \ldots, M-1, \; n = 0, \ldots, N-1. \tag{2.29}$$

Proiecțiile 1D ale modelului unui sistem 2D sînt utile în măsura în care prin intermediul lor este posibilă determinarea corectă a răspunsului sistemului la o secvență 2D de intrare dată.

Figura 2.3 ilustrează relația care trebuie să existe între elementele bidimensionale — *sistem*, *intrare*, *ieșire* — și proiecțiile unidimensionale ale acestora. Această relație se exprimă astfel:

$$Y(z_1, z_2) = Y^*(z_1, z_2), \tag{2.30}$$

unde $Y(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) \cdot U(z_1, z_2)$,

$$Y^*(z_1, z_2) = \mathfrak{B}^*\{\mathfrak{L}^*\{H(z_1, z_2)\} \cdot \mathfrak{L}^*\{U(z_1, z_2)\}\}.$$



Scanned with OKEN Scanner

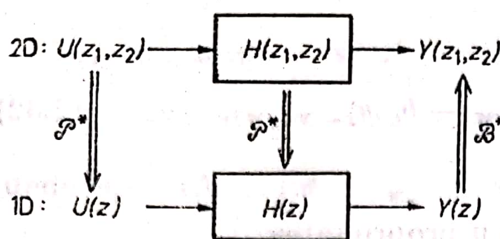



Figura 2.3.

Relaţia (2.30) poate fi rescrisă sub forma echivalentă

$$y_{m,n} = y_k^* = a_{0,0}\, u_k^* +$$

$$+ \sum_{\substack{i=0 \\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} (a_{i,j} u^*_{k-i \cdot p - j \cdot q} - b_{i,j} y^*_{k-i \cdot p - j \cdot q}), \quad (2.31)$$

unde $m = 0, \ldots, M-1$, $n = 0, \ldots, N-1$, $y_{m,n}$ fiind definit de (2.4.); $k = m \cdot p + n \cdot q$; $k < 0 \Rightarrow u_k^* = 0 \wedge y_k^* = 0$, $u_k^*$ fiind definit de (2.29); $i > Ma \vee j > Na \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

*Observaţii.* **1.** Proiecţia *verticală* satisface relaţia (2.31) numai pentru cazuri particulare de sisteme 2D. Altfel spus, în cazul general există $m \in [0, M-1]$ şi $n \in [0, N-1]$, astfel încît

$$y^v_{m+nM} \neq y_{m,n}.$$

De exemplu, să considerăm relaţia de recurenţă 2D,

$$y_{m,n} = u_{m,n} - b_{1,0}\, y_{m-1,n} - b_{0,1}\, y_{m,n-1} - b_{1,1} y_{m-1,n-1}.$$

Proiecţia sa verticală este

$$y^v_k = u^v_k - b_{1,0}\, y^v_{k-1} - b_{0,1}\, y^v_{k-M} - b_{1,1}\, y^v_{k-M-1},$$

unde $k = m + nM$.

Fie $M = 2$, $N = 3$. În acest caz

$$y^v_k = u^v_k - b_{1,0}\, y^v_{k-1} - b_{0,1}\, y^v_{k-2} - b_{1,1} y^v_{k-3},$$

deci

$$y^v_0 = u^v_0 = u_{0,0} = y_{0,0},$$

$$y^v_1 = u^v_1 - b_{1,0}\, y^v_0 = u_{1,0} - b_{1,0}\, y_{0,0} = y_{1,0},$$

$$y^v_2 = u_2 - b_{1,0}\, y^v_1 - b_{0,1}\, y^v_0 = u_{0,1} - b_{1,0}\, y_{1,0} - b_{0,1}\, y_{0,0} = y_{0,1} - b_{1,0}\, y_{1,0}.$$

Se observă că $y^v_2 = y_{0,1}$ numai în cazul în care $b_{1,0} = 0$.

De asemenea se constată că

$$y^v_3 = y_{1,1} + b^2_{1,0}\, y_{1,0},$$

$$y^v_4 = y_{0,2} - b_{1,0}(y_{1,1} - b^2_{1,0}\, y_{1,0} - b_{0,1}\, y_{1,0}),$$

deci într-adevăr proiecţia verticală satisface relaţia (2.31) numai în cazuri particulare de sisteme 2D.

**2.** Proiecţia *orizontală* a modelelor sistemelor 2D, la fel ca şi cea verticală, satisface relaţia dintre elementele bidimensionale şi cele unidimensionale, exprimată sub forma (2.31), numai pentru cazuri particulare de sisteme 2D.

**Lema 2.4.** Relația de recurență

$$y_k^s = a_{0,0}\, u_k^s + \sum_{\substack{i=0\\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} (a_{i,j} u_{k-iN-jM}^s - b_{i,j} y_{k-iN-jM}^s), \qquad (2.32)$$

unde $\{u_k^s\} = \mathfrak{P}^s\{u_{m,n}\}$, generează secvența $\{y_k^s\}$, cu proprietatea

$$y_k^s = 0, \text{ pentru } k \in R_{M,N}^1$$

*Demonstrație.* Conform definiției proiecției standard

$$u_k^s = 0, \text{ pentru } k < 0 \ \vee\ k \in R_{M,N}^1,$$

iar conform lemei 2.2, pentru

$$m_g \in S_{M,N} \wedge d = k - m_g,$$

rezultă că

$$d > 0 \Rightarrow d \in R_{M,N}^1,$$

ceea ce implică

$$u_d^s = 0.$$

Cu aceste observații relația (2.32) devine

$$y_d^s = -\sum_{\substack{i=0\\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j} y_{d-m_g}^s,$$

unde $m_g \geqslant m_1$.

Pentru $d \in (0, m_1)$ rezultă că

$$d - m_g < 0,$$

ceea ce implică

$$y_{d-m_g}^s = 0$$

și deci

$$y_d^s = 0.$$

Prin inducție rezultă că

$$d \in R_{M,N}^1 \Rightarrow y_d^s = 0.$$

**Teoremă.** Relația (2.31) este satisfăcută de proiecțiile *standard*, deci

$$y_{m,n} = y_k^s,$$

unde $y_{m,n}$ este definit de (2.4),

$k = mN + nM$,

$y_k^s$ fiind definit de (2.32).

*Demonstrație.* Notăm

$$d = k - m_g,$$

unde $m_g = iN + jM \in S_{M,N}$, și rescriem (2.32) sub forma

$$y_k^s = a_{0,0}u_k^s + \sum_{\substack{i=0\\i+j>0}}^{Mb}\sum_{j=0}^{Nb}(a_{i,j}u_d^s - b_{i,j}y_d^s).$$

Conform lemei 2.3,

$$d > 0 \Rightarrow \begin{cases} d \in S_{M,N}, & \text{pentru } m - i \geq 0 \wedge n - j \geq 0,\\ d \in R_{M,N}^1, & \text{pentru } m - i < 0 \vee n - j < 0,\end{cases}$$

iar conform lemei 2.4,

$$d \in R_{M,N}^1 \Rightarrow y_d^s = 0.$$

De asemenea, prin definiție,

$$d \in R_{M,N}^1 \Rightarrow u_d^s = 0$$

și

$$d < 0 \Rightarrow u_d^s = 0 \wedge y_d^s = 0.$$

Rezultă deci că

$$y_k^s = a_{0,0}u_{m,n} + \sum_{\substack{i=0\\i+j>0}}^{Mb}\sum_{i=0}^{Nb}(a_{i,j}u_d^s - b_{i,j}y_d^s)|_{d\in S_{M,N}} =$$

$$= a_{0,0}u_{m,n} + \sum_{\substack{i=0\\i+j>0}}^{Mb}\sum_{j=0}^{Nb}(a_{i,j}u_{m-i,n-j} - b_{i,j}y^s_{(m-i)N+(n-j)M})|_{\substack{m-i\geq 0\\n-j\geq 0}}.$$

Se observă că

$$y_0^s = a_{0,0}\, u_{0,0} = y_{0,0},$$

iar prin inducție se demonstrează că

$$m \in [0, M-1] \wedge n \in [0, N-1] \Rightarrow y_{mN+nM}^s = y_{m,n}.$$

În concluzie, *proiecția bidirecțională* a modelului unui sistem 2D este cea adecvată utilizării în analiza prin simulare numerică, iar modelul de simulare corespunzător poate fi utilizat ca model de simulare al sistemului 2D analizat.

Diferitele variante de modele de simulare ale sistemelor 2D, prezentate în paragrafele următoare, utilizează ca punct de plecare forme echivalente ale proiecției bidirecționale a modelului unui sistem 2D.

*Observații.* **1.** În calculul valorilor elementelor din secvența $\{y_k^s\}$, cu indici $k \in S_{M,N} \cup R_{M,N}^1$ nu intervin valori cu indici $d \in R_{M,N}^2$ (vezi demonstrația teoremei anterioare). Rezultă că valorile din această categorie nu prezintă interes din punctul de vedere al analizei prin simulare, efectuate asupra proiecțiilor bidirecționale ale modelelor acestor sisteme.

2. Conform celor demonstrate anterior, secvența $\{y_k^e\}$ reprezintă proiecția standard a ieșirii $\{y_{m,n}\}$ a sistemului 2D analizat. Această secvență poate fi deci aplicată la intrarea modelului de simulare al oricărui alt sistem 2D, care trebuie și el analizat și la a cărui intrare se aplică secvența $\{y_{m,n}\}$.

**Notă.** Pentru simplificarea prezentării, în cele ce urmează se aplică următoarele convenții :

*a.* se renunță la indicii superiori din specificarea proiecțiilor bidirecționale ;

*b.* acolo unde este necesar $Ma$ și (sau) $Na$ se substituie prin $Mb$, respectiv $Nb$. Acest lucru este posibil, deoarece prin convenție

$$i > Ma \vee j > Na \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Variante de modele 2D și proiecțiile bidirecționale ale acestora sînt prezentate în cele ce urmează.

Din (2.3) rezultă relația

$$Y(z_1, z_2) = a_{0,0}U(z_1, z_2) + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} z_1^{-i} z_2^{-j}(a_{i,j}\, U(z_1, z_2) - b_{i,j} Y(z_1, z_2)), \qquad (2.33)$$

care, la rîndul său, poate fi rescrisă sub una dintre următoarele forme :

$$Y(z_1, z_2) = a_{0,0}U(z_1, z_2) + \sum_{i=0}^{Mb} z_1^{-i} P^i(z_1, z_2) =$$

$$= a_{0,0}U(z_1, z_2) + P^0(z_1, z_2) + z_1^{-1}(P^1(z_1, z_2) + \ldots + \qquad (2.34)$$

$$+ z_1^{-1}(P^{Mb-1}(z_1, z_2) + z_1^{-1}P^{Mb}(z_1, z_2)) \ldots ),$$

unde

$$P^i(z_1, z_2) = \sum_{j=v_i}^{Na} a_{i,j} z_2^{-j} U(z_1, z_2) - \sum_{j=v_i}^{Nb} b_{i,j} z_2^{-j} Y(z_1, z_2),$$

cu $v_0 = 1$,

$v_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, Mb$

și, respectiv,

$$Y(z_1, z_2) = a_{0,0}U(z_1, z_2) + \sum_{j=0}^{Nb} z_2^{-j}\, Q^j(z_1, z_2) = a_{0,0}U(z_1, z_2) + Q^0(z_1, z_2) +$$

$$+ z_2^{-1}(Q^1(z_1, z_2) + \ldots + z_2^{-1}(Q^{Nb-1}(z_1, z_2) + z_2^{-1}\, Q^{Nb}(z_1, z_2)) \ldots ), \qquad (2.35)$$

unde

$$Q^j(z_1, z_2) = \sum_{i=v_j}^{Ma} a_{i,j} z_1^{-i} U(z_1, z_2) - \sum_{i=v_j}^{Mb} b_{i,j} z_1^{-i} Y(z_1, z_2),$$



Scanned with OKEN Scanner

cu $v_0 = 1$,

$v_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, Nb$.

Proiecţiile bidirecţionale ale celor trei variante anterioare — (2.33) (2.34), (2.35) — de model 2D sînt următoarele :

$$Y(z) = a_{0,0}U(z) + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j>0}}^{Mb}\sum_{j=0}^{Nb} z^{-iN-jM}(a_{i,j}U(z) - b_{i,j}Y(z)), \tag{2.36}$$

$$Y(z) = a_{0,0}U(z)) + P^0(z) + z^{-N}(P^1(z) + z^{-N}(\ldots + z^{-N}(P^{Mb-1}(z) + $$

$$+ z^{-N}P^{Mb}(z))\ldots), \tag{2.37}$$

unde

$$P^i(z) = \sum_{j=v_i}^{Na} a_{i,j}z^{-M}U(z) - \sum_{j=v_i}^{Nb} b_{i,j}z^{-M}Y(z),$$

$$Y(z) = a_{0,0}U(z) + Q^0(z) + z^{-M}(Q^1(z) + z^{-M}(\ldots + z^{-M}(Q^{Nb-1}(z) + $$

$$+ z^{-M}Q^{Nb}(z))\ldots), \tag{2.38}$$

unde

$$Q^j(z) = \sum_{i=v_j}^{Ma} a_{i,j}z^{-N}U(z) - \sum_{i=v_j}^{Mb} b_{i,j}{}^{-N}Y(z).$$

Se observă că relaţia (2.36) reprezintă transformata $z$ a relaţiei de recurenţă

$$y_k = a_{0,0}u_k + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j>0}}^{Mb}\sum_{j=0}^{Nb}(a_{i,j}u_{k-iN-jM} - b_{i,j}y_{k-iN-jM}). \tag{2.39}$$

Cu notaţia

$$S^b_{M,N} = \{m^b_g \mid m^b_g = iN + jM,\ i = 0,1, \ldots, Mb,\ \ j = 0,1,\ldots, Nb,$$

$$m^b_0 = 0,\ m^b_{g-1} < m^b_g,\ g = 1,\ 2, \ldots, \mathrm{Lb}\}, \tag{2.40}$$

unde $Lb = (Mb + 1)(Nb + 1) - 1$, relaţia (2.36) se rescrie astfel :

$$Y(z) = a_{0,0}U(z) + \sum_{g=1}^{Lb} z^{-m^b_g}(a^{\#}_g U(z) - b^{\#}_g Y(z)), \tag{2.41}$$

unde $i \in [0,\ Mb] \wedge j \in [0,\ Nb]$

$$\Rightarrow iN + jM = m^b_g \in S^b_{M,N} \wedge a^{\#}_g = a_{i,j} \wedge b^{\#}_g = b_{i,j}.$$

Relaţia de recurenţă corespunzătoare este

$$y_k = a_{0,0}u_k + \sum_{g=1}^{Lb}(a^{\#}_g u_{k-m^b_g} - b^{\#}_g\, y_{k-m^b_g}). \tag{2.42}$$



Scanned with OKEN Scanner

Se poate observa că în acest caz în calculul valorii $y_k$ intervin:

— maximum $Lb$ valori din secvența de ieșire, dar nu consecutive, ci selectate din mulțimea

$$\mathfrak{M}_Y = \{y_{k-q} \mid q \in [1, NY],\ NY = Mb \cdot N + Nb \cdot M\};$$

— maximum $(Lb + 1)$ valori din secvența de intrare, selectate din mulțimea

$$\mathfrak{M}_U = \{u_{k-q} \mid q \in [O, NU],\ NU = Ma \cdot N + Na \cdot M\}.$$

Mulțimea

$$\mathfrak{M}_X = \mathfrak{M}_Y \cup \mathfrak{M}_U \setminus \{u_k\}$$

reprezintă mulțimea variabilelor de stare caracteristice modelului matematic (2.42).

Deoarece $Ma \leqslant Mb$ și $Na \leqslant Nb$, rezultă că $NU \leqslant NY$ și că numărul total de variabile de stare este în acest caz

$$NX = NY + NU \leqslant 2NY.$$

Alte variante de proiecții bidirecționale se obțin dacă se rescrie (2.3), sub forma

$$Y(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} V(z_1, z_2) \tag{2.43}$$

unde

$$V(z_1, z_2) = \frac{U(z_1, z_2)}{\sum_{i=0}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}}. \tag{2.44}$$

Din (2.44) rezultă

$$V(z_1, z_2) = U(z_1, z_2) - \sum_{\substack{i=0 \\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} V(z_1, z_2). \tag{2.45}$$

Proiecțiile bidirecționale ale relațiilor (2.45) și (2.43) sînt

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= U(z) - \sum_{\substack{i=0 \\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j} z^{-iN-jM} V(z); \\ Y(z) &= \sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j} z^{-iN-jM} V(z). \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Cu notațiile utilizate în (2.41), relațiile de mai sus devin

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= U(z) - \sum_{g=1}^{Lb} b_g^{\#} z^{-m_g^b} V(z), \\ Y(z) &= \sum_{g=1}^{Lb} a_g^{\#} z^{-m_g^b} V(z). \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Relațiile de recurență corespunzătoare sînt următoarele :

$$\left.\begin{aligned} v_k &= u_k - \sum_{g=1}^{Lb} b_g^{\#} v_{k-m_g^b}, \\ y_k &= \sum_{g=0}^{Lb} a_g^{\#} v_{k-m_g^b}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.48)$$

Se observă că în acest caz în calculul valorii $y_k$ intervin numai $(Lb + 1)$ valori ale variabilei auxiliare $v$, selectate din mulțimea

$$\mathfrak{M}_V = \{v_{k-q} \mid q \in [0, NY]\}$$

și valoarea curentă a intrării $(u_k)$, deci mai puține variabile de stare decît în cazul utilizării relației (2.42).

Denumim *ordin* al *proiecției bidirecționale* a modelului unui sistem 2D numărul de variabile de stare caracteristice unei variante a proiecției. Se observă că ordinul variantelor prezentate anterior este

$$NX \in [NY, 2NY].$$



Scanned with OKEN Scanner

# 3. MODELE DE SIMULARE ALE SISTEMELOR 2D

## 3.1. Considerații generale

După cum s-a arătat în paragraful anterior, problema elaborării modelului de simulare al unui sistem 2D se reduce la cea a elaborării modelului de simulare al proiecției sale bidirecționale. Acest model de simulare trebuie să implementeze cît mai eficient modelul matematic reprezentat de proiecția bidirecțională a a modelului 2D. Variantele de modele de simulare prezentate în cele ce urmează caută să răspundă în cît mai mare măsură acestui deziderat. În contextul analizei prin simulare a sistemelor 2D, care utilizează modele de simulare de tip rețea (m.s.r.), sînt posibile două puncte de vedere asupra modelării sistemului 2D, analizat la un moment dat :

— realizarea m.s.r. al sistemului 2D prin interconectarea unor blocuri de tipuri predefinite, uzuale — blocuri de întîrziere și sumatoare ponderate ;

— modelarea sistemului 2D printr-un singur bloc specializat, de tip *„sistem 2D"*.

În ambele cazuri modelele de simulare utilizate — rețea de blocuri sau bloc unic — au cîte o intrare și cîte o ieșire. La intrare se aplică secvența care reprezintă proiecția bidirecțională a intrării sistemului 2D analizat, iar la ieșire, ca rezultat al analizei prin simulare, se obține secvența din care se sintetizează ieșirea sistemului 2D.

Un aspect deosebit de important pe care trebuie să îl avem în permanență în vedere este cel al eficienței cu care este realizată modelarea sistemelor 2D. Astfel, în cazul modelării sistemelor 2D prin rețele de blocuri, considerentele de eficiență se referă atît la numărul de blocuri componente, cît și la *ordinul* modelului, definit de suma ordinelor blocurilor de întîrziere utilizate. Un alt deziderat important se referă la adaptabilitatea modelului de simulare — orice modificare a modelului sistemului 2D sau a dimensiunilor intrării sale trebuie să conducă la modificări minime, cît mai simplu de realizat, ale m.s.r.

În cazul modelării unui sistem 2D printr-un singur bloc, considerentele de eficiență se referă atît la complexitatea structurilor de date utilizate în modelarea sistemului, cît și la eficiența algoritmilor care implementează funcțiile de tranziție și de ieșire asociate tipului funcțional. Acestea depind în primul rînd de forma particulară a proiecției bidirecționale, utilizată ca punct de pornire în implementarea tipului funcțional, dar și de particularitățile limbajului de programare în care se realizează implementarea. Trebuie remarcat și faptul că, în afara funcțiilor de tranziție și de ieșire este, de asemenea, necesară implementarea unei funcții de *inițializare*. Aceasta este apelată la începutul execuției experimentului de simulare pentru a inițializa structurile de date caracteristice tipului funcțional. Structurile de date utilizate trebuie să asigure în primul rînd memorarea valorilor variabilelor de stare, reprezentate în acest caz de valori ante-

rioare ale intrării şi ieşirii, necesare pentru calculul valorii curente a ieşirii. Numărul variabilelor de stare utilizate în implementarea tipului funcţional determină ordinul acestuia. De regulă se urmăreşte ca ordinul tipului funcţional implementat să fie cît mai mic. Pot exista însă şi situaţii în care o mică creştere a ordinului să asigure o implementare mai simplă a funcţiilor de tranziţie şi de ieşire.

În cazul general ordinul unui m.s.r. sau al unui tip funcţional care implementează o anumită variantă a proiecţiei bidirecţionale a modelului unui sistem 2D este egal cu ordinul respectivei variante.

## 3.2. Modelarea sistemelor 2D prin reţele de blocuri uzuale

### 3.2.1. Sinteza m.s.r. a sistemelor 2D

Pentru sinteza modelelor de simulare de tip reţea ale sistemelor 2D se porneşte de la proiecţiile bidirecţionale ale modelelor lor matematice. În §2.4. au fost prezentate mai multe variante ale acestor proiecţii, care stau la baza sintezei variantelor de m.s.r., prezentate în cele ce urmează.

*Varianta* A. Să considerăm forma (2.37) a proiecţiei bidirecţionale a modelului unui sistem 2D. Dacă se introduc notaţiile

$$\left.\begin{aligned} W^{Mb}(z) &= P^{Mb}(z),\\ W^{i}(z) &= P^{i}(z) + z^{-N}\,W^{i+1}(z), \qquad i = 1,\ldots, Mb-1,\\ W^{0}(z) &= a_{0,0}\,U(z) + P^{0}(z) + z^{-N}W^{1}(z), \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

rezultă că

$$Y(z) = W^{0}(z).$$

Trecînd în domeniul timp, obţinem

$$\left.\begin{aligned} w_k^{Mb} &= \sum_{j=0}^{Na} a_{Mb,j}\,u_{k-jM} - \sum_{j=0}^{Nb} b_{Mb,j}\,y_{k-jM},\\ w_k^{i} &= \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j}\,u_{k-jM} - \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j}y_{k-jM} + w_{k-N}^{i+1}, \qquad i = 1,\ldots, Mb-1,\\ y_k = w_k^{0} &= \sum_{j=0}^{Na} a_{0,j}\,u_{k-jM} - \sum_{j=1}^{Nb} b_{0,j}\,y_{k-jM} + w_{k-N}^{1}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Se poate observa că m.s.r. care implementează relaţiile de mai sus trebuie să conţină următoarele blocuri:

— *Na* blocuri de întîrziere de ordinul *M*, cu condiţii iniţiale nule, conectate în serie (cascadă); la intrarea acestei cascade se aplică secvenţa $\{u_k\}$, iar la ieşirile blocurilor de întîrziere din cascadă se obţin secvenţele $\{u_{k-jM}\}$, $j = 1, \ldots, Na$;

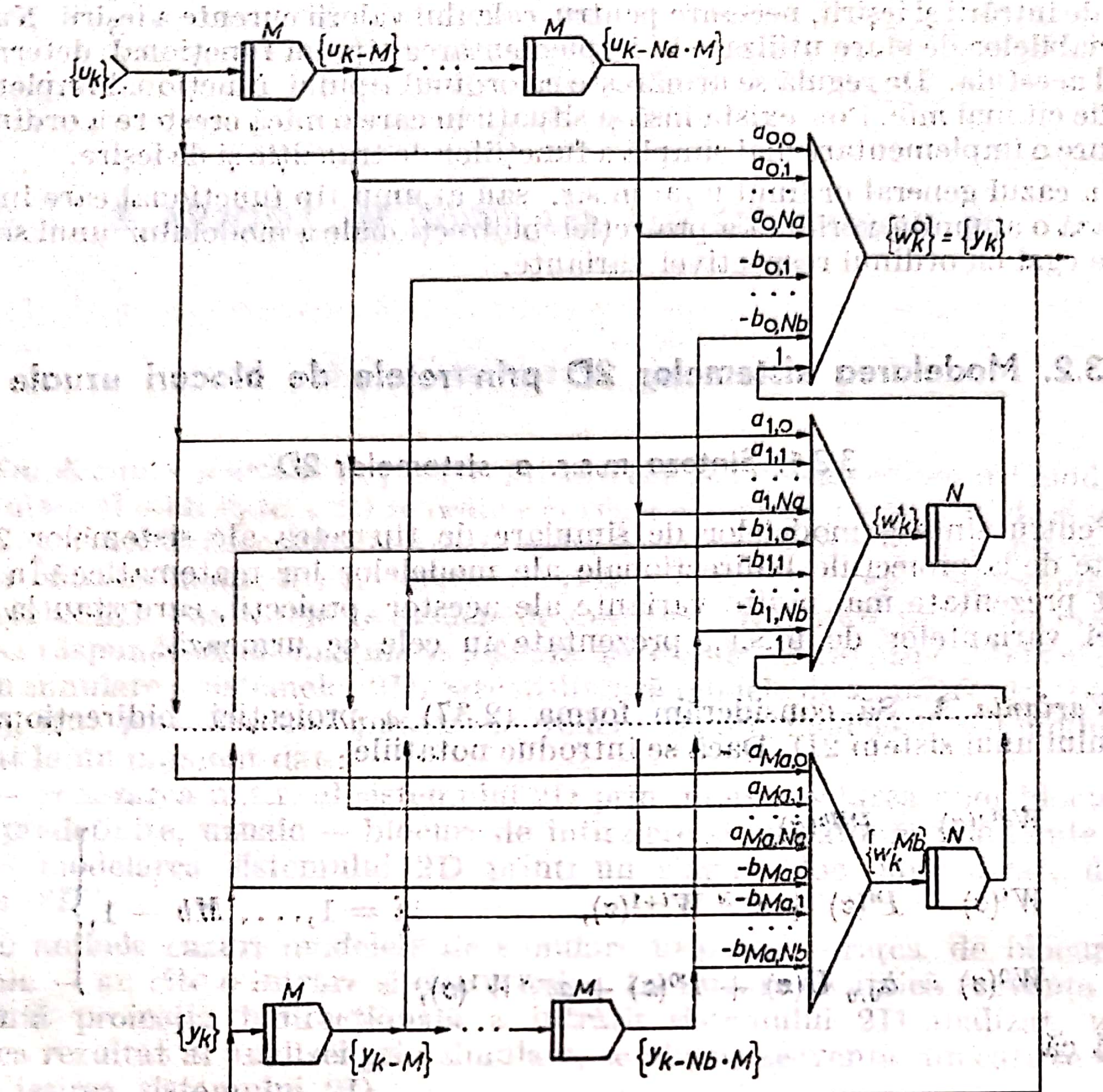



**Fig. 3.1.**

— $Nb$ blocuri de întîrziere de ordinul $M$, cu condiţii iniţiale nule, conectate într-o cascadă la intrarea căreia se aplică secvenţa $\{y_k\}$; de la ieşirile celor $Nb$ blocuri din cascadă se obţin secvenţele $\{y_{k-jM}\}$, $j = 1, \ldots, Nb$;

— $(Mb + 1)$ sumatoare ponderate, de la ieşirile cărora se obţin secvenţele $\{w_k^i\}$, $i = 0, \ldots, Mb$, cu observaţia că $\{y_k\} = \{w_k^0\}$. Numărul efectiv de intrări al fiecăruia dintre aceste sumatoare este condiţionat de valorile coeficienţilor $a_{i,j}$ şi, respectiv, $b_{i,j}$, deoarece conexiunile „ieşire bloc întîrziere — intrare sumator ponderat”, ale căror ponderi sînt nule, pot fi eliminate din m.s.r.;

— $Mb$ blocuri de întîrziere de ordinul $N$, cu condiţii iniţiale nule, conectate între sumatoarele ponderate astfel încît la intrarea fiecăruia dintre aceste blocuri se aplică secvenţa $\{w_k^i\}$, iar la ieşire se obţine secvenţa $\{w_{k-N}^i\}$, unde $i = 1, \ldots, Mb$.

Schema-bloc a acestui m.s.r. în cazul $Na = Nb$, este prezentată în figura 3.1. Se poate observa că ordinul acestei variante a m.s.r. este

$$NXA = (Na + Nb)\, M + Mb \cdot N = NY + Na \cdot M < 2NY$$

unde $NY = Nb \cdot M + Mb \cdot N$



Scanned with OKEN Scanner

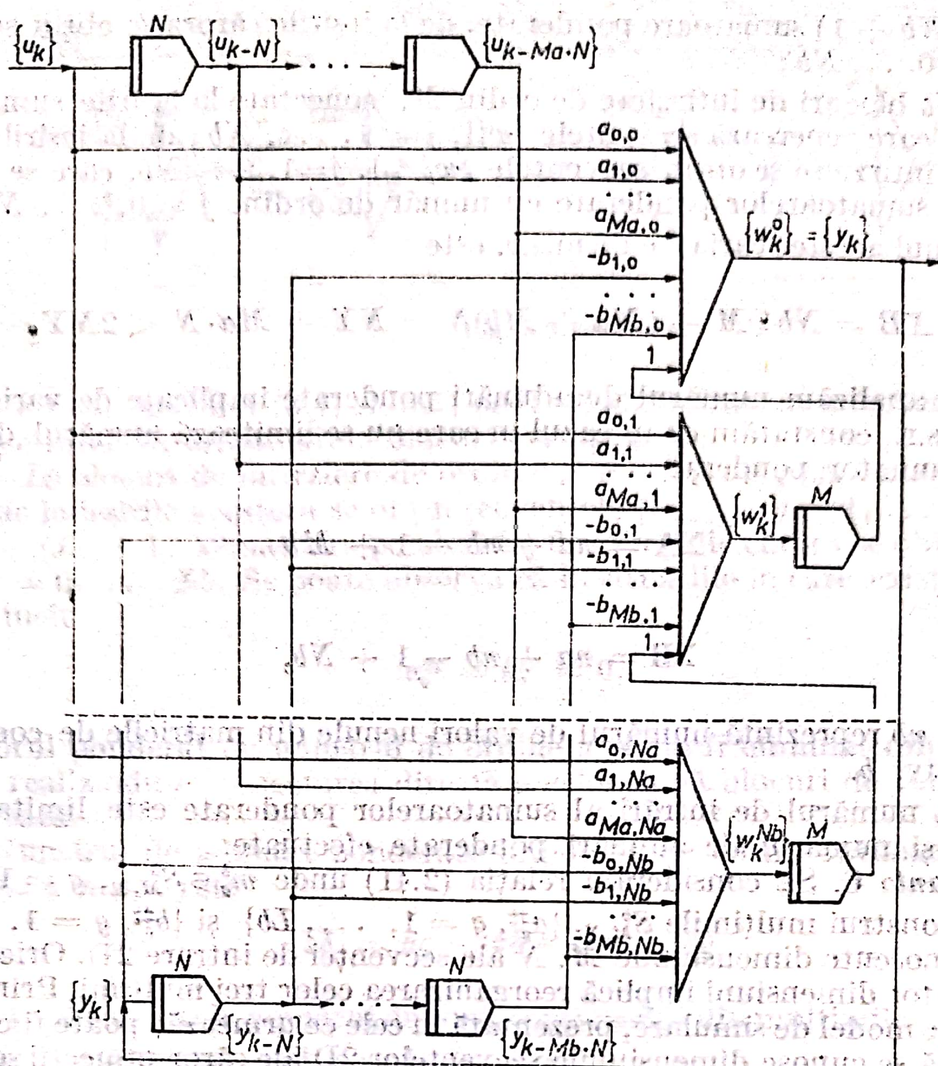



Fig. 3.2.

*Varianta* **B**. Această variantă se obţine într-o manieră similară celei în care a fost obţinută varianta **A**. Astfel, dacă se consideră forma (2.38) a proiecţiei bidirecţionale şi se utilizează notaţiile

$$\left.\begin{aligned} &W^{Nb}(z) = Q^{Nb}(z), \\ &W^{j}(z) = Q^{j}(z) + z^{-M}\,W^{j+1}(z), \qquad j = 1, \ldots, Nb-1, \\ &W^{0}(z) = a_{0,0}\,U(z) + Q^{0}(z) + z^{-M}\,W^{1}(z), \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

rezultă că

$$Y(z) = W^{0}(z).$$

Este evident faptul că m.s.r. corespunzător, a cărui schemă-bloc este prezentată în figura 3.2 (unde s-a considerat $Ma = Mb$), conţine, în cazul cel mai general, următoarele blocuri :

— $(Ma + Mb)$ blocuri de întîrziere de ordinul $N$, cu condiţii iniţiale nule, conectate în două cascade, la intrările cărora se aplică secvenţele $\{u_k\}$ şi, respectiv $\{y_k\}$ :

— $(Nb + 1)$ sumatoare ponderate, de la ieşirile cărora se obţin secvenţele $\{w_k^j\}$, $j = 0, \ldots, Nb$;

— $Nb$ blocuri de întîrziere de ordin $M$, conectate la ieşirile sumatoarelor ponderate, care generează secvenţele $\{w_k^j\}$, $j = 1, \ldots, Nb$; de la ieşirile acestor blocuri de întîrziere se obţin secvenţele $\{w_{k-M}^j\}$, $j=1, \ldots, Nb$, care se aplică la intrări ale sumatoarelor ponderate cu număr de ordine $j = 0, \ldots, Nb - 1$.

Ordinul acestei variante de m.s.r. este

$$NXB = Nb \cdot M + (Ma + Mb)N = NY + Ma \cdot N < 2NY.$$

Dacă analizăm numărul de adunări ponderate implicate de variantele **A** şi **B** ale m.s.r., constatăm că în cazul în care nu se limitează numărul de intrări ale unui sumator ponderat

$$\Sigma \mathbf{A} = na + nb - 1 + Mb$$

şi

$$\Sigma \mathbf{B} = na + nb - 1 + Nb,$$

unde $na$ şi $nb$ reprezintă numărul de valori nenule din matricile de coeficienţi $a$ şi, respectiv, $b$.

Dacă numărul de intrări al sumatoarelor ponderate este limitat, atunci va creşte şi numărul de adunări ponderate efectuate.

*Varianta* **C.** Să considerăm relaţia (2.41) unde $m_g^b \in S_{M,N}^b$, $g = 1, \ldots, Lb$. Pentru a construi mulţimile $S_{M,N}^b$, $\{a_g^{\#}, g = 1, \ldots, Lb\}$ şi $\{b_g^{\#}, g = 1, \ldots, Lb\}$, trebuie cunoscute dimensiunile $M$, $N$ ale secvenţei de intrare 2D. Orice modificare a acestor dimensiuni implică reorganizarea celor trei mulţimi. Prin urmare, varianta de model de simulare, prezentată în cele ce urmează, poate fi construită numai dacă se cunosc dimensiunile secvenţelor 2D ale căror proiecţii se aplică la intrarea m.s.r.

Deoarece

$$m_g^b > m_{g-1}^b, \qquad g = 1, \ldots, Lb,$$

relaţia (2.39) poate fi rescrisă astfel:

$$Y(z) = a_0^{\#}U(z) + z^{-m_1^b}(a_1^{\#}U(z) - b_1^{\#}Y(z) + z^{-(m_2^b - m_1^b)}(a_2^{\#}U(z) -$$

$$- b_2^{\#}Y(z) + z^{-(m_3^b - m_2^b)}(\ldots + z^{-(m_{Lb}^b - m_{Lb-1}^b)}(a_{Lb}^{\#}U(z) - b_{Lb}^{\#}Y(z))\ldots)) \quad (3.4)$$

Introducînd notaţiile

$$\left.\begin{aligned} & r_g = m_g^b - m_{g-1}^b, \qquad g = 1, \ldots, Lb, \\ & W^{Lb}(z) = a_{Lb}^{\#}U(z) - b_{Lb}^{\#}Y(z), \\ & W^g(z) = a_g^{\#}U(z) - b_g^{\#}Y(z) + z^{-r_g}W^{g+1}(z), \qquad g = 1, \ldots, Lb-1 \\ & W^0(z) = a_0^{\#}U(z) + z^{-r_1}W^1(z), \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

rezultă că

$$Y(z) = W^0(z).$$

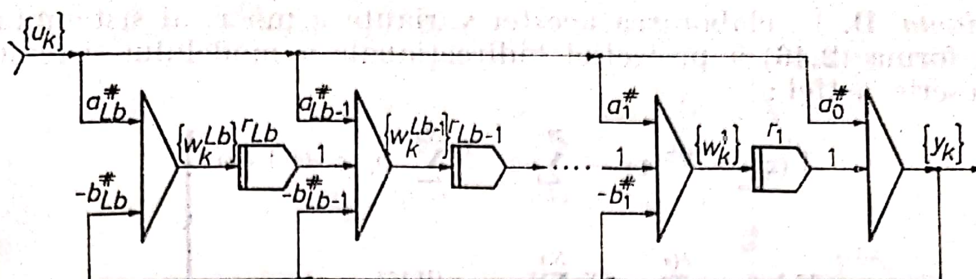



Fig. 3.3.

Pe baza relațiilor (3.4) și (3.5) poate fi sintetizat un m.s.r. în a cărui configurație intervin următoarele blocuri (v. fig. 3.3):

— $Lb$ blocuri de întîrziere de ordin $r_g$, $g = 1, \ldots, Lb$, cu condiții inițiale nule; de la ieșirile acestora se obțin secvențele $\{w^g_{k-r_g}\}$, $g = 1, \ldots, Lb$;

— $(Lb + 1)$ sumatoare ponderate, de la ieșirile cărora se obțin secvențele $\{w^g_k\}$, $g = 0, \ldots, Lb$. Se poate observa că în situațiile în care există $g \in [1, Lb)$, astfel încît

$$a^{\#}_g = b^{\#}_g = 0,$$

sumatorul ponderat cu numărul de ordine $g$ poate fi eliminat din configurația m.s.r., realizîndu-se conectarea directă a celor două blocuri de întîrziere care îl încadrează.

Numărul de adunări ponderate implicate de forma optimizată a acestei variante a m.s.r. este

$$\Sigma C = na + nb + pab - no,$$

unde $na$, $nb$ constituie numărul de coeficienți nenuli din mulțimile $\{a^{\#}_g, g = 1, \ldots, Lb\}$ și, respectiv, $\{b^{\#}_g, g = 1, \ldots, Lb\}$;

$pab$ reprezintă numărul de perechi de valori $(a^{\#}_g, b^{\#}_g)$, $g = 1, \ldots, Lb$, care îndeplinesc condiția

$$(a^{\#}_g \neq 0) \vee (b^{\#}_g \neq 0);$$

$$no = \begin{cases} 1 \text{ dacă } a_{0,0} = 0, \\ 0 \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Aici nu se pune problema înlocuirii sumatoarelor ponderate prin cascade de sumatoare ponderate echivalente, deoarece se folosesc sumatoare cu maximum trei intrări, iar limita maximă admisă de diferitele limbaje de simulare care operează cu m.s.r. este de regulă mai mare sau egală cu această valoare ($nw_s \geqslant 3$).

Ordinul variantei **C** a m.s.r. al sistemului 2D este

$$NXC = m_{Lb} = Mb \cdot N + Nb \cdot M = NY,$$

deci

$$NXC \leqslant NXA$$

și

$$NXC \leqslant NXB.$$

*Varianta* **D.** În elaborarea acestei variante a m.s.r. al sistemului 2D se utilizează forma (2.46) a proiecției bidirecționale a modelului sistemului 2D, care se rescrie astfel :

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= U(z) - \sum_{i=0}^{Mb} z^{-iN} \sum_{j=v_i}^{Nb} b_{i,j} z^{-jM} V(z), \\ Y(z) &= \sum_{i=0}^{Ma} z^{-iN} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j} z^{-jM} V(z), \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

unde $v_0 = 1$,

$v_i = 0, \quad i = 1, \ldots, Mb.$

Dacă introducem notațiile

$$\left.\begin{aligned} PB^i(z) &= \sum_{j=v_i}^{Nb} - b_{i,j} z^{-jM} V(z), \qquad i = 0, \ldots, Mb, \\ PA^i(z) &= \sum_{j=0}^{Nb} a_{i,j} z^{-jM} V(z), \qquad i = 0, \ldots, Ma \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

și factorizăm $z^{-N}$ în expresiile (3.6), care definesc $V(z)$ și $Y(z)$, obținem

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= U(z) + PB^0(z) + z^{-N}(PB^1(z) + z^{-N}(\ldots(PB^{Mb-1}(z) + \\ &\quad + z^{-N} PB^{Mb}(z))\ldots)), \\ Y(z) &= PA^0(z) + z^{-N}(PA^1(z) + z^{-N}(\ldots(PA^{Ma-1}(z) + z^{-N} PA^{Ma}(z))\ldots)). \end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

Cu notațiile

$$\left.\begin{aligned} WB^{Mb}(z) &= PB^{Mb}(z), \\ WB^i(z) &= PB^i(z) + z^{-N} WB^{i+1}(z), \qquad i = 1, \ldots, Mb - 1 \\ WB^0(z) &= U(z) + PB^0(z) + z^{-N} WB^1(z), \\ WA^{Ma}(z) &= PA^{Ma}(z), \\ WA^i(z) &= PA^i(z) + z^{-N} WA^{i+1}(z), \qquad i = 0, \ldots, Ma - 1, \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

din (3.8) rezultă

$$V(z) = WB^0(z),$$

$$Y(z) = WA^0(z).$$

Din analiza relațiilor (3.9) rezultă că din configurația acestei variante a m.s.r. al sistemului 2D trebuie să facă parte următoarele blocuri :

— $Mb$ blocuri de întîrziere de ordinul $M$, cu condiții inițiale nule, conectate într-o cascadă la intrarea căreia se aplică secvența a cărei transformată $z$

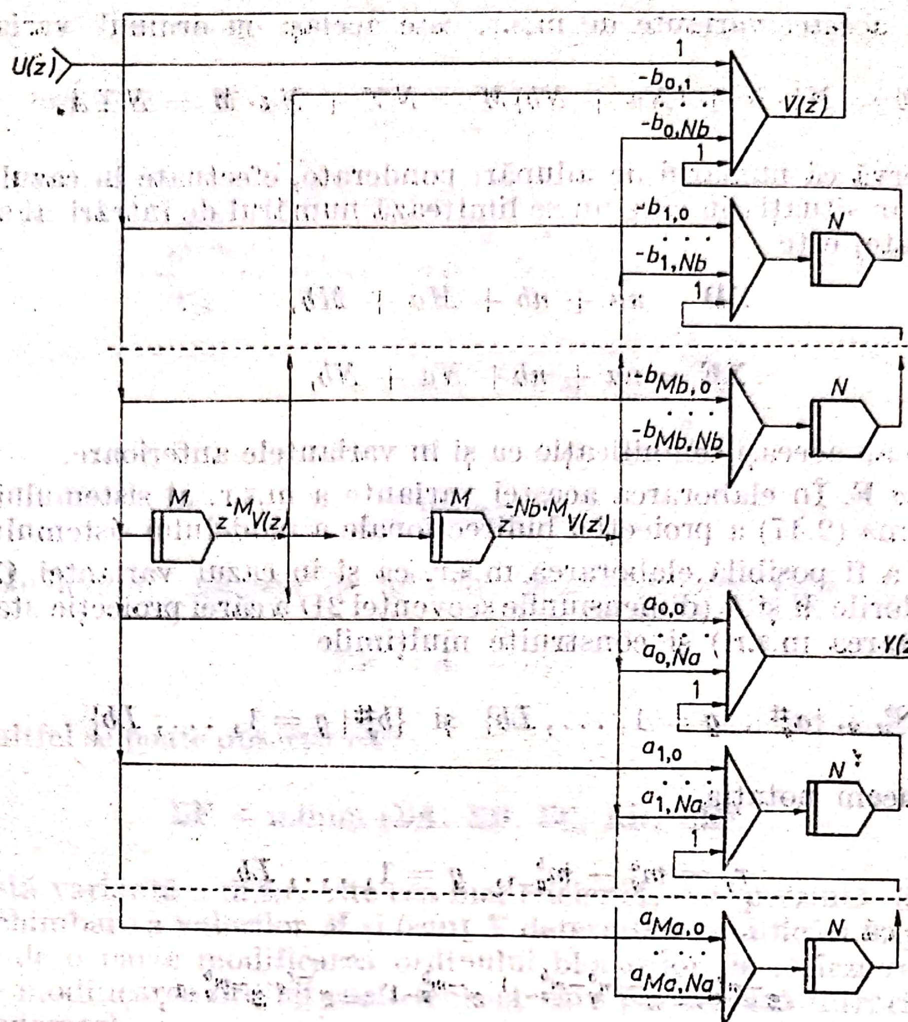



Fig. 3.4.

este $V(z)$; de la ieșirile acestor blocuri de întîrziere se obțin secvențele $\{v_{k-jM}\}$, $j = 1, \ldots, Nb$, ale căror transformate $z$ sînt $z^{-jM}V(z)$, $j = 1, \ldots, Nb$;

— $(Ma + Mb)$ blocuri de întîrziere de ordinul $N$, cu condiții inițiale nule; la intrările acestor blocuri se aplică secvențele $\{wa_k^i\}$, $i = 1, \ldots, Ma$ și respectiv, $\{wb_k^i\}$, $i = 1, \ldots, Mb$;

— $(Ma + Mb + 2)$ sumatoare ponderate, de la ieșirile cărora se obțin secvențele $\{wa_k^i\}$, $i = 0, \ldots, Ma$ și, respectiv, $\{wb_k^i\}$, $i = 0, \ldots, Mb$.

Ordinul acestei variante a m.s.r., a cărei schemă-bloc pentru cazul $Na = Nb$ este prezentată în figura 3.4, este

$$NXD = (Ma + Mb)\,N + Nb \cdot M = NY + Ma \cdot N,$$

deci este egal cu ordinul variantei **B**.

*Varianta* **E**. Această variantă se obține în același mod cu cea anterioară factorizînd însă $z^{-M}$. Rezultă astfel un model de simulare care include:

— $Mb$ blocuri de întîrziere de ordinul $N$;

— $(Na + Nb)$ blocuri de întîrziere de ordinul $M$;

— $(Na + Nb + 2)$ sumatoare ponderate.

Ordinul acestei variante de m.s.r. este acelaşi cu ordinul variantei **A** :

$$NXE = Mb \cdot N + (Na + Nb)M = NY + Na \cdot M = NXA.$$

Se observă că numărul de adunări ponderate, efectuate în cazul variantelor **D** şi **E**, în situaţia în care nu se limitează numărul de intrări al sumatoarelor ponderate, este

$$\Sigma \mathbf{D} = na + nb + Ma + Mb,$$

$$\Sigma \mathbf{E} = na + nb + Na + Nb,$$

unde $na$ şi $nb$ au aceeaşi semnificaţie ca şi în variantele anterioare.

*Varianta* **F**. În elaborarea acestei variante a m.s.r. al sistemului 2D pornim de la forma (2.47) a proiecţiei bidirecţionale a modelului sistemului 2D.

Pentru a fi posibilă elaborarea m.s.r. ca şi în cazul variantei **C**, trebuie cunoscute valorile $M$ şi $N$ (dimensiunile secvenţei 2D a cărei proiecţie standard se aplică la intrarea m.s.r.) şi construite mulţimile

$$S^b_{M,N}, \{a^{\#}_g|, \ g = 1, \ldots, Lb\} \quad \text{şi} \quad \{b^{\#}_g | \ g = 1, \ldots, Lb\}$$

Introducem notaţia

$$r_g = m^b_g - m^b_{g-1}, \quad g = 1, \ldots, Lb$$

şi observăm că

$$z^{-m^b_g} = z^{-(m^b_g - m^b_{g-1})} \, z^{-m^b_{g-1}} = z^{-r_g} \, z^{-m^b_{g-1}},$$

deci

$$z^{-m^b_{Lb}} = z^{-r_{Lb}} z^{-r_{Lb-1}} \ldots z^{-r_2} z^{-r_1}. \tag{3.10}$$

Rezultă că secvenţele ale căror transformate $z$ sînt $z^{-m^b_g} V(z)$, $g = 1, \ldots, Lb$ pot fi obţinute de la ieşirile a $Lb$ blocuri de întîrziere (fiecare dintre acestea realizează o întîrziere de ordin $r_g$, $g = 1, \ldots Lb$), dacă la intrarea cascadei se aplică secvenţa $\{v_k\}$, a cărei transformată $z$ este $V(z)$.

În acest caz, pentru a obţine secvenţele $\{v_k\}$ şi $\{y_k\}$, m.s.r. trebuie completat cu două sumatoare ponderate (sau cascade de sumatoare ponderate). La intrările acestora se conectează ieşirile blocurilor din cascada de întîrziere, aşa cum se arată în figura 3.5.

Se observă că ordinul acestei variante a m.s.r. este

$$NXF = m_{Lb} = NY,$$

deci acelaşi cu cel al variantei **C**.

Între cele două variante există însă diferenţe în ceea ce priveşte numărul de adunări ponderate efectuate. Astfel, faţă de cazul variantei **C**, care implică

$$\Sigma \mathbf{C} = na + nb + pab - no$$

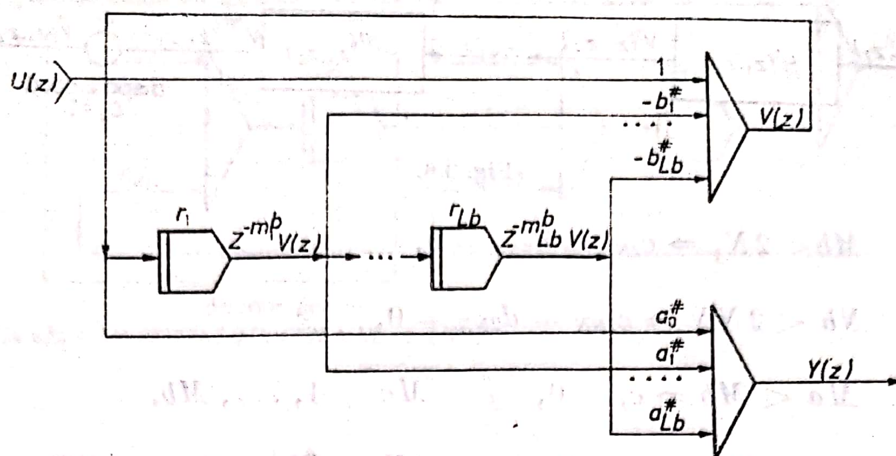



Fig. 3.5.

adunări ponderate, numărul de adunări ponderate efectuate în varianta $F$ este

$$\Sigma\mathbf{F} = na + nb.$$

De altfel se poate observa că

$$\Sigma\mathbf{F} \leqslant \text{minim } (\Sigma\mathbf{A}, \Sigma\mathbf{B}, \Sigma\mathbf{C}, \Sigma\mathbf{D}, \Sigma\mathbf{E}),$$

deci această variantă a m.s.r. este cea mai eficientă, dar prezintă dezavantajul că orice schimbare a valorilor $M$ şi (sau) $N$ determină modificări importante ale m.s.r. (pe de o parte modificarea ordinului blocurilor de întîrziere, iar pe de altă parte modificarea ordinii coeficienţilor care ponderează intrările sumatoarelor ponderate).

*Varianta* **G.** În cazul în care funcţia de transfer a unui sistem 2D poate fi adusă la forma

$$H(z_1, z_2) = c_0 \prod_{k=1}^{NN} \frac{1 + c_{2k-1} z_i^{-1} + c_{2k} z_i^{-2}}{1 + d_{2k-1} z_i^{-1} + d_{2k} z_i^{-2}}, \tag{3.11}$$

unde $NN = N_1 + N_2$

$$N_i = \left[\frac{M_i + 1}{2}\right], \quad i = 1, 2,$$

$$M_1 = Mb,$$

$$M_2 = Nb,$$

$$i = \begin{cases} 1, & k \in [1, N_1], \\ 2, & k \in (N_1, NN], \end{cases}$$

$$c_j, d_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, 2\,NN,$$

$$d_{2k} \neq 0, \quad k \in [1, N_1) \vee k \in (N_1, NN),$$

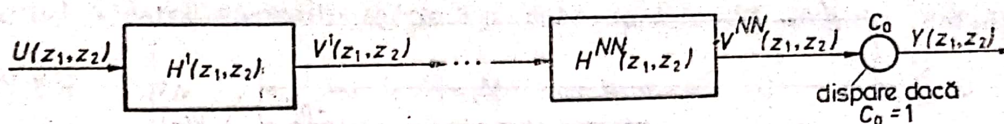



Fig. 3.6.

$$Mb < 2N_1 \Rightarrow c_{2N_1} = d_{2N_1} = 0,$$

$$Nb < 2NN \Rightarrow c_{2NN} = d_{2NN} = 0,$$

$$Ma < Mb \Rightarrow c_j = 0, \quad j = Ma + 1, \ldots, Mb,$$

$$Na < Nb \Rightarrow c_j = 0, \quad j = N_1 + Na + 1, \ldots, NN.$$

Sistemul modelat de funcția de transfer (3.11) este deci echivalent cu un sistem format din $NN$ subsisteme conectate în serie (fig. 3.6), modelate de funcțiile de transfer

$$H^k(z_1, z_2) = \frac{1 + c_{2k-1} z_i^{-1} + c_{2k} z_i^{-2}}{1 + d_{2k-1} z_i^{-1} + d_{2k} z_i^{-2}} = \frac{V^k(z_1, z_2)}{V^{k-1}(z_1, z_2)}, \quad k = 1, \ldots, NN,$$

unde

$$V^0(z_1, z_2) = U(z_1, z_2),$$

$$Y(z_1, z_2) = c_0 \, V^{NN}(z_1, z_2).$$

Proiecția bidirecțională a acestei variante de model 2D este

$$H^k(z) = \frac{1 + c_{2k-1} z^{-D_k} + c_{2k} z^{-2D_k}}{1 + d_{2k-1} z^{-D_k} + d_{2k} z^{-2D_k}} = \frac{V^k(z)}{V^{k-1}(z)}, \tag{3.12}$$

unde $D_k = \begin{cases} N, & k \in [1, N_1], \\ M, & k \in (N_1, NN]. \end{cases}$

Din (3.12) rezultă că

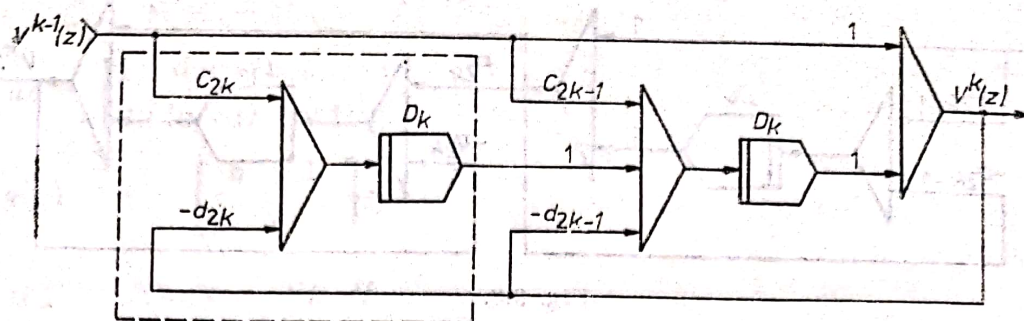
$$V^k(z) = V^{k-1}(z) + z^{-D_k}(c_{2k-1} V^{k-1}(z) - d_{2k-1} V^k(z) + $$
$$+ z^{-D_k}(c_{2k} V^{k-1}(z) - d_{2k} V^k(z))). \tag{3.13}$$

În figura 3.7a este prezentat m.s.r. care implementează modelul matematic (3.13), iar în figurile 3.7b și 3.7c sînt prezentate variantele sale simplificate, corespunzătoare cazurilor

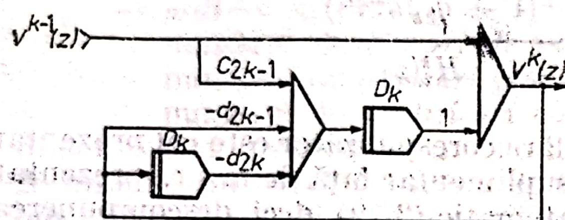
$$c_{2k} = 0$$

și respectiv

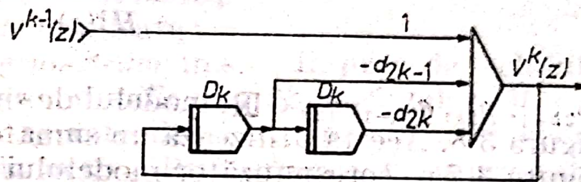
$$c_{2k-1} = 0 \wedge c_{2k} = 0$$



a. Cazul general



b. Cazul $c_{2k}=0$



c. Cazul $c_{2k-1}=0 \wedge c_{2k}=0$

Fig. 3.7.

M.s.r. care implementează modelul matematic (3.11) se obține prin conectarea în serie a $NN$ m.s.r. de tipul celor prezentate în figura 3.7, care implementează proiecțiile bidirecționale $H^k(z)$, $k = 1, \ldots, NN$.

Se observă că numărul total de adunări ponderate implicat de această variantă de m.s.r. este

$$\Sigma G = nc + nd + nr$$

unde $nc$, $nd$ constituie numărul de coeficienți $c_j$ și respectiv $d_j$ nenuli,

$$nc \leqslant Ma + Na,$$

$$nd \leqslant Mb + Nb,$$

$nr$ — numărul de adunări ponderate cu 1; se observă că fiecare dintre cele $NN$ m.s.r. interconectate implică cel puțin o astfel de adunare, iar cele care utilizează coeficienți $c_j \neq 0$ implică și cîte o adunare corespunzătoare fiecărui coeficient $c_j$, deci

$$nr = NN + \left[\frac{Ma+1}{2}\right] + \left[\frac{Na+1}{2}\right].$$

Ordinul m.s.r. este

$$NXG = Mb \cdot N + Nb \cdot M = NY,$$

deoarece pe ansamblul său se utilizează $Mb$ blocuri de întîrziere de ordinul $N$ și $Nb$ blocuri de întîrziere de ordinul $M$.



Scanned with OKEN Scanner

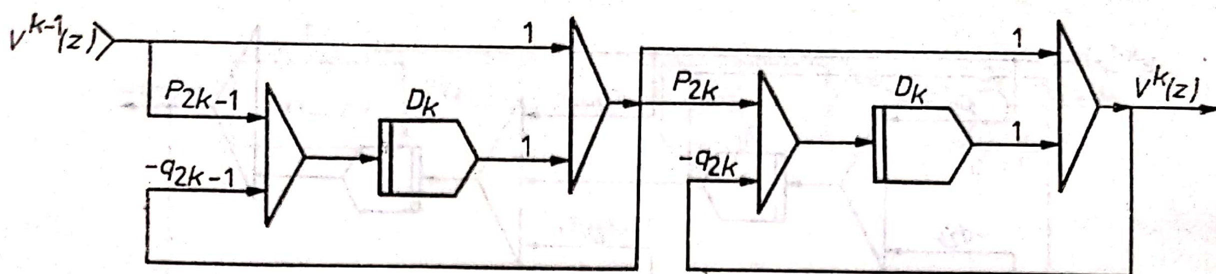



Fig. 3.8.

În cazul în care funcția de transfer (3.12) poate fi adusă la forma

$$H^k(z) = \underbrace{\frac{(1 + p_{2k-1}\, z^{-D_k})}{(1 + q_{2k-1} z^{-D_k})}}_{H_1^k(z)} \cdot \underbrace{\frac{(1 + p_{2k}\, z^{-D_k})}{(1 + q_{2k}\, z^{-D_k})}}_{H_2^k(z)}, \tag{3.14}$$

cu $p_{2k-1}, p_{2k}, q_{2k-1}, q_{2k} \in \mathbb{R}$, modelul de simulare corespunzător este cel prezentat în figura 3.8. Acesta utilizează un sumator suplimentar față de m.s.r. prezentat în figura 3.7 a, corespunzător modelului matematic (3.12), deci descompunerea efectuată are consecințe defavorabile asupra complexității m.s.r.

### 3.2.2 Analiză comparativă a variantelor de m.s.r. ale sistemelor 2D

Principalele caracteristici ale variantelor **A** — **G** de modele de simulare ale sistemelor 2D sînt concentrate în tabelul 3.1,

*Tabelul 3.1*

| Variantă | Ordin | Număr adunări ponderate | Număr blocuri de întîrziere |
|---|---|---|---|
| **A** | $NY + Na \cdot M$ | $nab - 1 + Mb$ | $Mb + Nb + Na$ |
| **B** | $NY + Ma \cdot N$ | $nab - 1 + Nb$ | $Mb + Nb + Ma$ |
| **C** | $NY$ | $nab + pab - no$ | $Lb = (Mb+1)(Nb+1)-1$ |
| **D** | $NY + Ma \cdot N$ | $nab + Ma + Mb$ | $Mb + Nb + Ma$ |
| **E** | $NY + Na \cdot M$ | $nab + Na + Nb$ | $Mb + Nb + Na$ |
| **F** | $NY$ | $nab$ | $Lb$ |
| **G** | $NY$ | $g(Ma)+g(Mb)+g(Na)+g(Nb)$ | $Mb + Nb$ |

unde $nab$ este numărul de valori nenule din matricele de coeficienți $\{a_{i,j}\}, \{b_{i,j}\}$,

$$nab \leqslant (Ma + 1)(Na + 1) + (Mb + 1)(Nb + 1),$$

$pab$ — numărul de perechi de valori $(a_{i,j}, b_{i,j})$, $i = 0, \ldots, Mb$, $j = 0, \ldots, Nb$, care îndeplinesc condiția

$$(a_{i,j} \neq 0) \vee (b_{i,j} \neq 0);$$

$$no = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a_{0,0} = 0, \\ 0, & \text{în caz contrar}; \end{cases}$$

$$g(n) = n + \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$NY = Mb \cdot N + Nb \cdot M.$$

Tabelul 3.1. pune în evidență faptul că varianta optimă de m.s.r. este varianta **G**, deoarece asigură valori minime pentru următoarele elemente caracteristice m.s.r. :

— *ordinul* modelului de simulare;
— numărul de *blocuri de întîrziere* utilizate;
— numărul de *adunări ponderate* implicate;
— numărul de *modificări ale parametrilor* m.s.r., impuse de schimbarea dimensiunilor secvențelor 2D prelucrate. Modificarea dimensiunilor $M$ și (sau) $N$ impune, în cazul tuturor celor 7 variante de m.s.r, modificarea ordinelor blocurilor de întîrziere din configurația m.s.r.. Prin urmare, deoarece varianta **G** conține numărul minim de blocuri de întîrziere, ea este cel mai puțin afectată de modificarea valorilor $M$ și (sau) $N$.

Singurul dezavataj al variantei **G** este acela că există cazuri în care modelul matematic al sistemului 2D analizat prin simulare numerică nu poate fi adus la forma (3.11). În astfel de cazuri m.s.r. trebuie realizat în una dintre variantele **A** — **F**.

Din analiza comparativă a variantelor **A** — **F** ale m.s.r. al unui sistem 2D rezultă următoarele :

**1.** Perechile de variante (**A**, **E**), (**B**, **D**), și, respectiv, (**C**, **F**) *sînt echivalente ca ordin și număr de blocuri de întîrziere utilizate*, dar variantele **A**, **B** și, respectiv, **F** implică un număr mai mic de adunări ponderate, deci sînt preferabile față de variantele **E**, **D** și, respectiv, **C**.

**2.** *Ordinul* variantei **F** este mai mic decît cel al variantelor **A** și **B** numai în cazurile în care

$$Na \neq 0 \wedge Ma \neq 0.$$

**3.** Varianta **F** utilizează un *număr mai mare de blocuri de întîrziere* decît celelalte variante de m.s.r.

**4.** Pentru a construi varianta **F** a m.s.r. trebuie cunoscute dimensiunile $M$, $N$ ale secvențelor 2D prelucrate și construite mulțimile $S^b_{M,N}$, $\{a_g^{\#} \mid g=0,\ldots,Lb\}$ și $\{b_g^{\#} \mid g = 0, \ldots, Lb\}$, deci *efortul de implementare este mai mare* decît în cazul variantelor **A** și **B**. De asemenea, modificarea dimensiunilor intrării — $M$ și (sau) $N$ — necesită de regulă reconstruirea acestor mulțimi, ceea ce implică atît modificarea ordinelor blocurilor de întîrziere, cît și schimbarea ordinii relative a coeficienților ce ponderează intrările sumatoarelor ponderate din configurația m.s.r.

**5.** Opțiunea pentru varianta **A** sau **B** este condiționată pe de o parte de criteriul de optim preferat de analist, iar pe de altă parte de particularitățile modelului matematic al sistemului și de dimensiunile secvențelor 2D cu care se operează. Astfel, în cazul în care se urmărește obținerea unui m.s.r. cu ordin minim, varianta **A** este cea adecvată dacă

$$Na \cdot M < Ma \cdot N.$$



Scanned with OKEN Scanner

Se observă că în situațiile particulare în care

$$Ma = Na \wedge Mb = Nb,$$

alegerea este condiționată numai de dimensiunile $M, N$ ale secvențelor 2D prelucrate :

$$M < N \Rightarrow \text{se alege varianta } \mathbf{A};$$

$$M > N \Rightarrow \text{se alege varianta } \mathbf{B}.$$

În cele ce urmează este prezentat un algoritm foarte general de alegere a unei variante de m.s.r. dintre **A**, **B** și **F**. Alegerea se bazează pe *criteriul de selecție* preferat de către utilizator, criteriu care poate fi :

*c*1 — implementare și modificare cît mai simplă a m.s.r. ;
*c*2 — ordin minim.

```
algoritm selecție variantă m.s.r. este
    date Ma, Na, Mb, Nb, M, N, criteriu;
    dacă criteriu = c1 ∨ Na = 0 ∨ Ma = 0
        atunci dacă Na·M < Ma·N
                   atunci * alege varianta A;
                   altfel * alege varianta B;
               ;
        altfel * alege varianta F;
    ;
sfîrșit
```

*Exemple*

**1.** Să considerăm cazul unui sistem 2D modelat de funcția de transfer

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 - 0.1\, z_1^{-1}}{1 - 0.5\, z_1^{-1} - 0.8\, z_2^{-1} + 0.4\, z_1^{-1} z_2^{-1}}. \tag{3.15}$$

Se observă că în acest caz

$$Ma = Mb = Nb = 1,$$

$$Na = 0,$$

iar matricele de coeficienți ai funcției de transfer sînt

$$\{a_{i,j}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad \{b_{i,j}\} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.5 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

*Tabelul 3.2*

| Variantă | Ordin | Număr adunări ponderate | Număr blocuri de întîrziere |
|---|---|---|---|
| **A** | $NY$ | 6 | 2 |
| **B** | $NY + N$ | 6 | 3 |
| **F** | $NY$ | 6 | 3 |

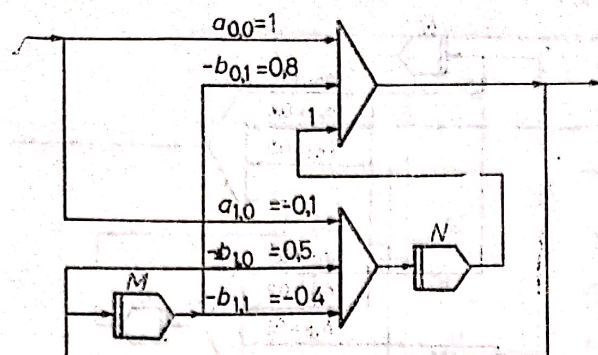



Fig. 3.9.

Caracteristicile variantelor **A**, **B** și **F** ale modelului de simulare al sistemului cu funcția de transfer (3.15) sînt prezentate în tabelul 3.2, unde $NY = M + N$, cu $M$, $N$ — dimensiunile secvențelor 2D prelucrate.

Din analiza particularităților celor trei variante de m.s.r. rezultă că :

**a.** Varianta **B** este cea mai defavorabilă, deci trebuie evitată.

**b.** Variantele **A** și **F** au același ordin, dar varianta **A** utilizează un număr mai mic de blocuri de întîrziere și, de asemenea, este mai simplu de construit și modificat, deci se impune alegerea acesteia. Schema-bloc a variantei **A** a m.s.r. al sistemului analizat este prezentată în figura 3.9.

Funcția de transfer (3.15) poate fi adusă la forma

$$H(z_1, z_2) = H^1(z_1)\, H^2(z_2), \tag{3.16}$$

unde

$$H^1(z_1) = \frac{1 - 0.1\, z_1^{-1}}{1 - 0.5\, z_1^{-1}}, \tag{3.17}$$

$$H^2(z_2) = \frac{1}{1 - 0.8\, z_2^{-1}}. \tag{3.18}$$

În acest caz este posibilă realizarea variantei **G** a m.s.r., care, după cum a rezultat din analiza comparativă a variantelor de modele de simulare, este cea optimă. În cazul exemplului de sistem 2D considerat varianta **G** a m.s.r. are următoarele caracteristici :

— ordin $NXG = NY$,
— număr adunări ponderate $\Sigma G = 6$,
— număr blocuri de întîrziere $BG = 2$.

Acestea sînt identice cu cele ale variantei **A**.

Schema-bloc a variantei G a m.s.r. se obține, așa cum se arată în figura 3.10, prin conectarea în serie a două m.s.r., care reprezintă cazuri particulare ale celui din figura 3.7a. Aceasta, deoarece (3.17) și (3.18) sînt cazuri particulare ale funcției de transfer (3.15), căreia îi corespunde m.s.r. din figura 3.7a.

Datorită formei particulare a numărătorului din (3.18), în schema-bloc corespunzătoare ar fi apărut un sumator ponderat cu o singură intrare, care însă a fost înlocuit printr-un bloc de amplificare.

Se observă că numărul total de blocuri din configurația variantei **G** a m.s.r. este mai mare decît cel din configurația variantei **A**. Deci, dacă pentru selecția variantei de m.s.r. se aplică și acest criteriu (care nu a fost considerat în analiza comparativă anterioară) rezultă că varianta optimă, în cazul sistemului 2D cu funcția de transfer (3.15), este varianta **A**.

2. Fie un sistem 2D cu funcția de transfer

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 + 0.3\, z_1^{-1} + 0.4\, z_2^{-1} + 0.2\, z_1^{-1} z_2^{-1}}{1 - 0.5\, z_1^{-1} - 0.8\, z_2^{-1} + 0.4\, z_1^{-1} z_2^{-1}} \tag{3.19}$$



Scanned with OKEN Scanner

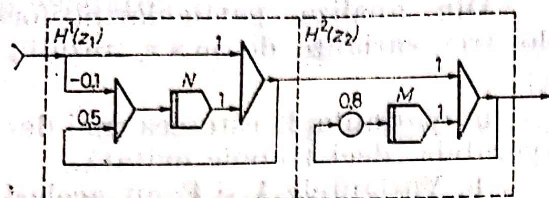



Fig. 3.10.

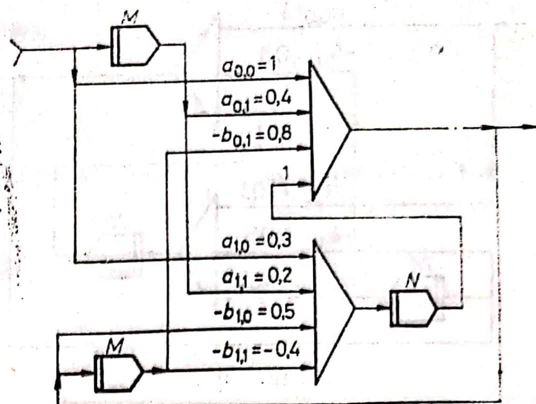



Fig. 3.11.

care prelucrează secvențe 2D ce îndeplinesc condiția

$$N = M + x, \tag{3.20}$$

unde $x \in [1, M-1]$ cu $M, N$ — relativ prime.

*Tabelul 3.3*

| Variantă | Ordin | Număr adunări ponderate | Număr blocuri de întîrziere |
|---|---|---|---|
| **A** | $NY + M$ | 9 | 3 |
| **B** | $NY + M + x$ | 9 | 3 |
| **F** | $NY$ | 8 | 3 |

În acest caz variantele **A**, **B** și **F** de m.s.r. au caracteristicile prezentate în tabelul 3.3.

Este evident faptul că dacă se ține seama numai de informațiile din acest tabel, ordinea de preferință pentru cele trei variante considerate este **F**, **A**, **B**. Totuși, așa cum s-a arătat, pentru a obține varianta **F** este necesar un efort mai mare decît în cazul variantelor **A** și **B**. Să analizăm deci problemele ridicate de elaborarea variantelor **A** și **F** ale m.s.r.

Schema-bloc a variantei **A** este prezentată în figura 3.11. Se observă că modificarea valorilor $M$ și (sau) $N$ implică în acest caz numai modificarea ordinului a 1 — 3 blocuri de întîrziere din configurația m.s.r.

În cazul în care se optează pentru varianta **F** trebuie construite mulțimile $S^b_{M,N}$, $\{a^{\#}_g, g = 0, \ldots, Lb\}$ și $\{b^{\#}_g, g = 0, \ldots, Lb\}$. Valorile elementelor mulțimii $S^b_{M,N}$, definită de (2.40) sînt cele din tabelul 3.4, pe baza căruia se determină elementele din tabelul 3.5, necesare pentru elaborarea variantei **F** a m.s.r., prezentată în figura 3.12.

*Tabelul 3.4*

| $i$ \ $j$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $M$ |
| 1 | $M + x$ | $2M + x$ |

Se observă că în cazul în care numărul de intrări al sumatoarelor ponderate este limitat la 3, cele două sumatoare cu cîte pa-



Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.5

| $g$ | $m_g^b$ | $r_g$ | $a_g^{\#}$ | $b_g^{\#}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | — | $a_{0,0} = 1$ | $b_{0,0} = 1$ |
| 1 | $M$ | $M$ | $a_{0,1} = 0.4$ | $b_{0,1} = -0.8$ |
| 2 | $M+x$ | $x$ | $a_{1,0} = 0.3$ | $b_{1,0} = -0.5$ |
| 3 | $2M+x$ | $M$ | $a_{1,1} = 0.2$ | $b_{1,1} = 0.4$ |

tru intrări, care apar în ambele variante ale m.s.r., trebuie înlocuite prin cascade de cîte două sumatoare ponderate, deci crește numărul de blocuri din configurația m.s.r.

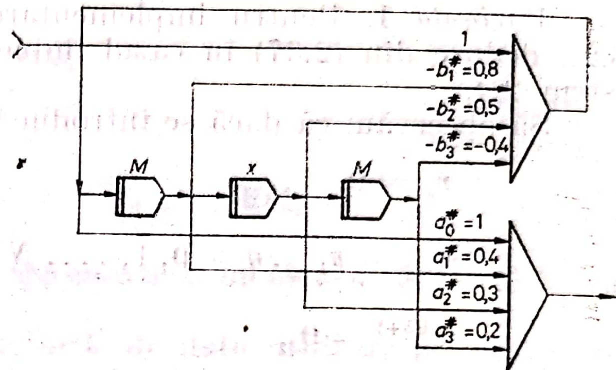



Fig. 3.12.

În cazul în care valorile $M$ și (sau) $N$ se modifică, dar între acestea se păstrează relația (3.20), ca și în cazul variantei A, singurele modificări necesare sînt cele ale parametrilor blocurilor de întîrziere din configurația m.s.r. Dacă însă noile valori $M, N$ nu respectă relația (3.20), atunci trebuie reconstruite mulțimile $S^b_{M,N}$, $\{a_g^{\#}\}$ și $\{b_g^{\#}\}$, iar parametrii sumatoarelor ponderate trebuie actualizați corespunzător.

## 3.3. Variante de implementare a tipului funcțional „sistem 2D"

Tipul funcțional „sistem 2D" poate fi implementat în diferite variante, a căror proiectare pornește de la una dintre variantele proiecției bidirecționale a modelului unui sistem 2D dintre cele prezentate în § 2.4. Indiferent de varianta de implementare, parametrii acestui tip funcțional sînt reprezentați de valorile caracteristice modelului 2D,

$$Ma,\ Na,\ \{a_{i,j} \mid i = 0, 1, \ldots, Ma,\ j = 0, 1, \ldots Na\},$$

$$Mb,\ Nb,\ \{b_{i,j} \mid i = 0, 1, \ldots, Mb,\ j = 0, 1, \ldots, Nb\},$$

și de dimensiunile secvențelor 2D prelucrate de acesta,

$$M, N \text{ — relativ prime.}$$

Reamintim că în paragrafele anterioare s-a presupus $b_{0,0}=1$, dar tipul funcțional „sistem 2D" poate fi implementat astfel încît să accepte și $b_{0,0} \neq 1$ (dar neapărat nenul). Modul în care sînt memorate valorile parametrilor tipului funcțional poate diferi de la o variantă de implementare la alta.

În cele ce urmează prezentăm numai două variante de implementare a tipului funcțional „sistem 2D", care utilizează ca punct de plecare variantele (2.37) și, respectiv, (2.46) ale proiecției bidirecționale a modelului 2D. Acestea asigură modelarea printr-un singur bloc a variantelor **A** și, respectiv, **F** de m.s.r. ale sistemelor 2D. *În proiectarea celor două variante de implementare a tipului funcțional „sistem 2D" se pune accentul pe considerentele de eficiență atît din punct de vedere al memoriei utilizate, cît și al vitezei de calcul.* Astfel, se urmărește ca printr-o proiectare judicioasă a structurilor de date și a algoritmilor să se asigure o implementare compactă a funcțiilor caracteristice tipului funcțional. De asemenea, în vederea creșterii vitezei de calcul, se urmărește reducerea numărului de adresări indexate, efectuate pe parcursul prelucrărilor.

*Varianta* **I.** Pentru implementarea acestei variante utilizăm relațiile (3.2), deduse din (2.37) în cazul implementării variantei **A** a m.s.r. al unui sistem 2D.

Să observăm că dacă se introduc notațiile

$$v_k = 0,$$

$$v_{k-q} = y_{k-q},\ q = 0, 1, \ldots, NY, \quad NY = Mb \cdot N + Nb \cdot M,$$

$$w_k^{Mb+1} = 0,$$

atunci relațiile (3.2) pot fi unificate într-o singură relație,

$$w_k^i = w_{k-N}^{i+1} + \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j}\, u_{k-jM} + \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j}\, v_{k-jM}, \quad i = 0, 1, \ldots, Mb, \qquad (3.21)$$

cu observația că $y_k = w_k^0$.

Este evident faptul că în această variantă de implementare a tipului funcțional „sistem 2D" funcția de tranziție trebuie să asigure calculul valorilor

$$\{w_k^i \mid i = 0, 1, \ldots, Nb\},$$

în timp ce funcția de ieșire se implementează printr-o simplă atribuire

$$y_k = w_k^0.$$

Să ne concentrăm deci atenția asupra implementării funcției de tranziție. Se poate observa că la momentul de calcul $k$ al experimentului de simulare valorile $\{w_{k-N}^{i+1} \mid i = 0, 1, \ldots, Mb\}$ sînt necesare numai pentru calculul valorilor $\{w_k^i \mid i = 0, 1, \ldots, Mb\}$ și pot fi tratate ca valori inițiale ale sumelor ce trebuie calculate în acest scop. Prin urmare, dacă au fost memorate valorile

$$\{w_{k-q}^i \mid q = 1, \ldots, N,\ i = 1, \ldots, Mb\},$$

pentru memorarea valorilor calculate pentru $\{w_k^i \mid i = 1, \ldots, Mb\}$, pot fi utilizate celulele de memorie în care erau memorate inițial $\{w_{k-N}^{i+1} \mid i = 1, \ldots, Mb\}$

așa cum se arată în cele ce urmează :

$$\begin{matrix} w^1_{k-N} & w^1_{k-N+1} & \dots & w^1_{k-1} & w^2_{k-N} & \dots & w^{Mb}_{k-N} & \dots & w^{Mb}_{k-1} & 0. \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow \\ w^0_k & & & & w^1_k & & w^{Mb-1}_k & & & w^{Mb}_k \end{matrix}$$

După efectuarea calculului valorilor $\{w^i_k, i = 0, 1, \dots, Mb\}$, valorile memorate sînt

$$w^0_k, \{w^i_{k-q} \mid q = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, Mb\}.$$

Cu notația

$$q' = q + 1,$$

se observă că de fapt se cunosc valorile

$$y_k, \{w^i_{k+1-q'} \mid q' = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, Mb\},$$

deci valori necesare pentru calculele ce se efectuează la momentul de calcul $k + 1$ al experimentului de simulare.

Din cele de mai sus rezultă că structurile de date utilizate în implementarea tipului funcțional „sistem 2D" trebuie să asigure memorarea valorilor

$$\{u_{k-q} \mid q = 0, \dots, Na \cdot M\},$$
$$\{y_{k-q} \mid q = 1, \dots, Nb \cdot M\},$$
$$w^0_k, \{w^i_{k-q} \mid q = 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, Mb\}.$$

Toate aceste valori pot fi memorate în cadrul unui singur vector $x$, denumit vector de stare, după cum urmează :

$$x_{(N1-q)} = u_{k-q}, \quad q = 0, \dots, Na \cdot M, \quad N1 = Na \cdot M + 1,$$

$$x_{(N2-q)} = y_{k-q}, \quad q = 1, \dots, Nb \cdot M, \quad N2 = N1 + Nb \cdot M + 1 = (Na + Nb)M + 2,$$

$$x_{(N2)} = w^0_k = y_k,$$

$$x_{(N2+iN-q)} = w^i_{k-q}, \quad q = 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, Mb.$$

Pentru memorarea valorilor coeficienților $a_{i,j}$, respectiv $b_{i,j}$ pot fi utilizați de asemenea, vectori, astfel încît adresarea să se realizeze prin intermediul unui singur indice, deci mai rapid. Vectorii utilizați pentru memorarea valorilor coeficienților $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ au configurația următoare :

$$vb_0 = 0,$$

$$vb_{i \cdot bb+j} = b_{i,j}, \quad i = 0, 1, \dots, Mb, \quad j = 0, 1, \dots, Nb, \quad i + j > 0,$$
$$bb = Nb + 1,$$

$$va_{i \cdot aa+j} = a_{i,j}, \quad i = 0, 1, \dots, Ma, \quad j = 0, 1, \dots, Na, \quad aa = Na + 1$$

deci reprezintă proiecțiile orizontale ale matricelor de coeficienți $a$ și, respectiv, $b$.

În implementarea funcției de tranziție asociate tipului funcțional „sistem 2D" trebuie să ținem seama de faptul că la trecerea de la momentul de calcul $k-1$ la momentul $k$ al experimentului de simulare vectorul de stare trebuie să își modifice conținutul. Astfel, la sfîrșitul prelucrărilor de la momentul de calcul $k-1$ vectorul de stare conține:

$$u_{k-1-Na\cdot M}\, u_{k-Na\cdot M} \ldots u_{k-1}\, y_{k-1-Nb\cdot M} \ldots y_{k-2}\, \underset{(=y_{k-1})}{w^0_{k-1}}\, w^1_{k-N} \ldots w^{Mb}_{k-2}\, w^{Mb}_{k-1},$$

iar la momentul de calcul $k$ trebuie să conțină, în faza inițială

$$u_{k-Na\cdot M} \ldots u_{k-1}\, u_k\, y_{k-Nb\cdot M} \ldots y_{k-1}\, w^1_{k-N} \ldots w^{Mb}_{k-1}\, 0.$$

Se observă că în noua configurație a vectorului $x$ intervin majoritatea valorilor de la momentul $k-1$, deplasate spre stînga cu o poziție. Cazuri particulare constituie valorile $x_{N1}$ și $\{x_{N2+iN},\ i = 0, \ldots, Mb\}$, care trebuie actualizate cu valori corespunzătoare momentului de calcul $k$. Actualizarea se realizează printr-o succesiune de atribuiri, după cum urmează:

$$x_{i-1} \leftarrow x_i, \quad i = 2, \ldots, NTI,\ NTI = (Na + Nb)\, M + Mb \cdot N + 2$$

$$x_{N1} \leftarrow u_k$$

$$x_{NTA} \leftarrow 0$$

$$x_{N2+iN} \leftarrow x_{N2+iN} + \sum_{j=0}^{Na} va_{ia+j} \cdot x_{N1-jM} - \sum_{j=0}^{Nb} vb_{ib+j} \cdot x_{N2-jM}, \quad i = 0, \ldots, Mb$$

unde $ia = i \cdot aa$, $ib = i \cdot bb$, $i = 0, \ldots, Mb$.

Cu notațiile

$$iw = N2 + iN,$$

$$ja = ia + j,$$

$$jb = ib + j,$$

$$ixa = N1 - jM,$$

$$ixb = N2 - jM = ixa + Nb \cdot M + 1 = ixa + d,$$

ultima dintre atribuiri se rescrie astfel

$$x_{iw} \leftarrow x_{iw} + \sum_{ja=ia}^{ib+Na} (va_{ja} \cdot x_{ixa} - vb_{jb} \cdot x_{ixb}) + Sb,$$

$$\text{unde } Sb = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{jb=ib+Na+1}^{ib+Nb} (vb_{jb} \cdot x_{N2-jM}), & \text{dacă } Nb > Na, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$



Scanned with OKEN Scanner

Se observă că, pentru a evita repetarea unor calcule, este indicat ca structurile de date caracteristice implementării tipului funcțional „sistem 2D" să fie completate cu parametri auxiliari ($N1$, $N2$, $NTI$, $aa$, $bb$, $d$) ale căror valori sînt calculate după specificarea valorilor parametrilor modelului 2D.

În varianta de implementare prezentată în cele ce urmează, se cere ca valorile coeficienților modelului 2D ($a_{i,j}$, $b_{i,j}$) să fie introduse pe linii, pentru a fi memorate direct în vectorii *va* și *vb*. În algoritmul prezentat nu sînt incluse verificări asupra valorilor parametrilor blocului. Aceste verificări trebuie însă efectuate în cazul unei implementări efective.

```
            procedura parametri este
* citește Ma, Na, Mb, Nb;
        /* calculează valori parametri auxiliari */
atribuie    aa ← Na + 1
 |      & bb ← Nb + 1
 |      & nra ← Ma · aa + Na
 |      & nrb ← Mb · bb + Nb
 ;
* citește (va_i, i = 0, nra), (vb_i, i = 0, nrb);
atribuie    v ← vb_0
 |      & vb_0 ← 0
 ;
dacă v ≠ 1 /* S-a presupus b_0.0 ≠ 0, deci v ≠ 0 */
 | atunci pentru i = 0, nra repetă
 |         | atribuie va_i ← va_i/v;
 |         ;
 |        pentru i = 1, nrb repetă
 |         | atribuie vb_i ← vb_i/v;
 |         ;
 ;
            sfîrșit
```

Procedura de inițializare a structurilor de date caracteristice acestei variante de implementare a tipului funcțional „sistem 2D" calculează valorile parametrilor auxiliari $d$, $N1$, $N2$, $NTI$ și inițializează vectorul de stare.

```
          procedura inițializare I este
atribuie    d ← Nb · M + 1
 |      & N1 ← Na · M + 1
 |      & N2 ← N1 + d
 |      & NTI ← N2 + Mb · N
 ;
pentru i = 1, NTI repetă
 |  atribuie  x_i ← 0;
 ;
          sfîrșit
```

Procedura prezentată în cele ce urmează realizează prelucrările specifice tranziției stării blocurilor de tip funcțional „sistem 2D".

procedura tranziţie I este

```
pentru i = 2, NTI repetă
|  atribuie x_{i-1} ← x_i ;     /* deplasare stînga*/
;
atribuie  x_{N1} ← u     /* u este valoarea de intrarea curentă*/
|      & x_{NTI} ← 0
|      & iw ← N2
|      & ia ← 0
|      & ib ← 0
;
cît timp iw ≤ NTI repetă
|  atribuie  s ← x_{iw}
|  |     & ixa ← N1
|  |     &  jb ← ib
|  ;
|  pentru ja = ia, ia + Na  repetă
|  |  atribuie  s ← s + va_{ja} · x_{ixa} − vb_{jb} · x_{ixa+d}
|  |  |      &  jb ← jb + 1
|  |  |      & ixa ← ixa − M
|  ;  ;
|  dacă  Nb > Na
|  |  atunci atribuie ixb ← ixa + d ;
|  |         pentru jb = ib + Na + 1, ib + Nb repetă
|  |         |  atribuie  s ← s − vb_{jb} · x_{ixb}
|  |         |  |     & ixb ← ix b − M
|  |         |  ;
|  |         ;
|  ;
|  atribuie  x_{iw} ← s
|  |      & ia ← ia + aa
|  |      & ib ← ib + bb
|  |      & iw ← iw + N
|  ;
;
```

sfîrşit

*Varianta* **II.** Să considerăm relaţiile de recurenţă corespunzătoare variantei (2.46) a proiecţiei bidirecţionale a modelului unui sistem 2D :

$$\left.\begin{aligned} v_k &= u_k - \sum_{\substack{i=0\\ i+j>0}}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} b_{i,j}\, v_{k-iN-jM}, \\ y_k &= \sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} a_{i,j}\, v_{k-iN-jM}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Se observă că în acest caz variabilele de stare sînt

$$\{v_{k-q} \mid q = 0, 1, \ldots, NY, \; NY = Mb \cdot N + Nl \cdot M\},$$

iar funcţiile de tranziţie şi, respectiv, de ieşire trebuie să asigure calculul valorilor $\{v_k\}$ şi, respectiv, $\{y_k\}$, conform cu (3.22).

Pentru memorarea valorilor variabilelor de stare, utilizăm vectorul de stare $x$, astfel încît

$$x_q = v_{k-q}, q = 0, 1, \ldots, NY,$$

iar pentru memorarea valorilor coeficienților $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ adoptăm aceeași soluție ca și în cazul variantei I — utilizarea vectorilor $va$ și $vb$, în care

$$vb_0 = 0,$$

$$vb_{i \cdot bb+j} = b_{i,j},\ i = 0, \ldots, Mb,\ j = 0, \ldots, Nb,\ i + j > 0,$$

$$va_{i \cdot aa+j} = a_{i,j},\ i = 0, \ldots, Ma,\ j = 0, \ldots, Na,$$

unde $bb = Nb + 1$,

$aa = Na + 1.$

Cu aceste convenții, rezultă că

$$x_0 = u - \sum_{i=0}^{Mb} \sum_{j=0}^{Nb} vb_{i \cdot bb+j} \cdot x_{iN+jM} \tag{3.23}$$

unde $u$ reprezintă valoarea curentă a variabilei de intrare. Condiția $i + j > 0$ din specificarea sumei a devenit inutilă, deoarece $vb_0 = 0$.

$$y = \sum_{i=0}^{Ma} \sum_{j=0}^{Na} va_{i \cdot aa+j} \cdot x_{iN+jM}, \tag{3.24}$$

unde $y$ reprezintă valoarea variabilei de ieșire.

Deoarece cele două sume din (3.23) și (3.24) diferă numai prin valorile unor parametri, pentru calculul acestora poate fi utilizată aceeași funcție, definită după cum urmează:

```
funcţia suma (x, vv, MM, NN, N, M, k) este
atribuie   suma ← 0
|      & iv ← 0
|      & ix ← 0
;
cît timp iv ≤ MM repetă
|    atribuie jx ← ix;
|    pentru jv = iv, iv + NN repetă
|    |  atribuie suma ← suma + vv_jv · x_jx
|    |  |      & jx ← jx + M
|    |  ;
|    ;
|    atribuie   iv ← iv + k
|    |      & ix ← ix + N
|    ;
;
                 sfîrşit
```

În aceste condiții, implementarea procedurii care asigură tranziția stării și a funcției care calculează valoarea variabilei de ieșire este foarte simplă :

```
             funcţia tranziţie II este
pentru i = 1, NY repetă
|  atribuie x_i ← x_{i-1} ;
;
```

/* S-a efectuat deplasarea spre dreapta cu o poziție, corespunzătoare trecerii de la momentul $k-1$ la momentul $k$ al e.s. În continuare se calculează și se memorează valoarea $v_k = x_0$*/

```
atribuie x_0 ← u − suma (x, vb, Mb, Nb, N, M, bb) ;
      sfîrşit

      funcţia ieşire II este
atribuie y ← suma (x, va, Ma, Na, N, M, aa) ;
      sfîrşit
```

Procedura de inițializare asigură calculul valorii parametrului auxiliar $NY$ și inițializarea vectorului de stare :

```
              procedura iniţializare II este
atribuie NY ← Mb·N + Nb·M ;
pentru i = 0, NY repetă
|   atribuie x_i ← 0 ;
;
                      sfîrşit
```

Citirea parametrilor principali și calculul valorilor parametrilor auxiliari *aa* și *bb* sînt realizate de către aceeași procedură (procedura *parametri*) ca și în prima variantă de implementare a tipului funcțional „sistem 2D”.

Din analiza celor două variante de implementare rezultă că acestea au ordinul

$$NTI = NY + Na \cdot M + 2$$

și, respectiv,

$$NTII = NY + 1 < NTI.$$

De asemenea, se observă că cea de-a doua variantă utilizează mai puțini parametri auxiliari și este mai simplu de implementat, deci ea este cea care trebuie preferată pentru implementarea tipului funcțional „sistem 2D”.



Scanned with OKEN Scanner

# 4. CONVERSII DE INTRARE ŞI DE IEŞIRE

## 4.1. Modalităţi de realizare

*Conversia de intrare* are ca obiectiv generarea proiecţiei bidirecţionale standard a intrării sistemului 2D analizat prin simulare, denumită în cele ce urmează *secvenţă de intrare* şi notată $\{u_k\}$. Pentru realizarea conversiei de intrare poate fi utilizat :

**A.** *Simulatorul* cu ajutorul căruia se efectuează analiza asistată de calculator a sistemelor 2D. În acest caz secvenţa de intrare se obţine de la ieşirea unui model de simulare **MI**, care operează în mod „*convertor*" sau în mod „*generator*".

Un *model de simulare „convertor de intrare"* preia dintr-un fişier pe suport extern *proiecţia verticală sau orizontală* a secvenţei 2D ce trebuie convertită şi furnizează secvenţa de intrare corespunzătoare, deci realizează transformarea

$$\{u_k^{v/o}\} \to \{u_k\},$$

unde

$$\{u_k^{v/o}\} = \mathfrak{P}^{v/o}\{u_{m,n}\},$$

$$\{u_k\} = \mathfrak{P}^{s}\{u_{m,n}\}.$$

Un *model de simulare „generator"* este un model care are ca parametri informaţiile ce definesc secvenţa 2D a cărei proiecţie standard trebuie generată (dimensiuni, valorile elementelor etc. — v. § 4.2.).

Analiza prin simulare a unui sistem 2D şi conversia intrării acestuia se pot realiza în cadrul aceluiaşi experiment de simulare (on-line) sau pe parcursul a două e.s. distincte (off-line). În primul caz modelul de simulare **MI** este conectat în serie cu modelul de simulare **M** al sistemului 2D analizat, ca în figura 4.1a. În cel de-al doilea caz se execută mai întîi un e.s. asupra modelului **MI**, a cărui ieşire se înregistrează într-un fişier secvenţial pe suport extern, prin intermediul unui bloc de scriere. Secvenţa de intrare este preluată din fişier pe parcursul execuţiei unui e.s. asupra modelului de simulare **M**, prin intermediul unui bloc de citire, conectat la intrarea modelului **M**, ca în figura 4.1b.

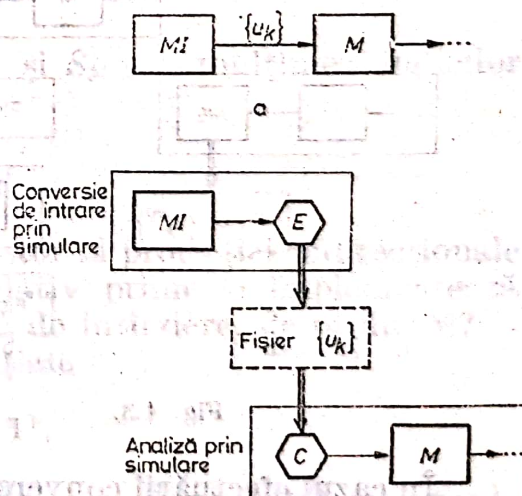


**Fig. 4.1.**

**B.** Un program de conversie specializat, cu rol de *preprocesor*, care operează în mod „*convertor*". În cazul general acesta preia pro-



Scanned with OKEN Scanner

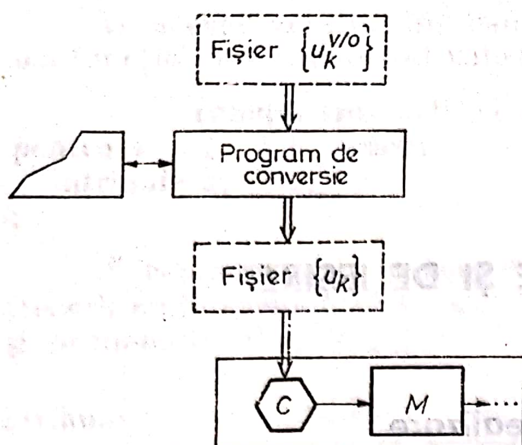


Fig. 4.2.

iecţiile verticală sau orizontală ale secvenţei 2D ce trebuie convertită fie dintr-un fişier pe suport extern, fie de la consolă, în regim interactiv. Secvenţa de intrare obţinută ca rezultat al conversiei se depune într-un fişier secvenţial pe suport extern, de unde este preluată în etapa de analiză prin simulare a sistemului 2D prin intermediul unui bloc de citire, aşa cum se arată în figura 4.2.

*Conversia de ieşire* realizează, în cazul cel mai general, transformarea

$$\{y_k\} \to \{y_{m,n}\},$$

unde $\{y_k\}$ este secvenţa obţinută la ieşirea modelului **M** al sistemului 2D analizat prin simulare,

$$\{y_{m,n}\} = \mathcal{B}^b\{y_k\}.$$

În cazul în care rezultatul conversiei de ieşire se înregistrează într-un fişier secvenţial, această prelucrare se defineşte după cum urmează:

$$\{y_k\} \to \{y_k^{v/o}\},$$

unde $\{y_k^{v/o}\} = \mathcal{D}^{v/o}\{y_{m,n}\}$.

Conversia de ieşire, ca şi conversia de intrare, poate fi realizată în unul dintre următoarele moduri:

**A.** Prin simulare — în acest caz se utilizează un *model de simulare „convertor de ieşire"*, notat **ME**, care operează fie on-line (fig. 4.3 a), fie off-line (fig. 4.3b).

**B.** De către un *program de conversie specializat*, al cărui mod de operare este ilustrat în figura 4.4.

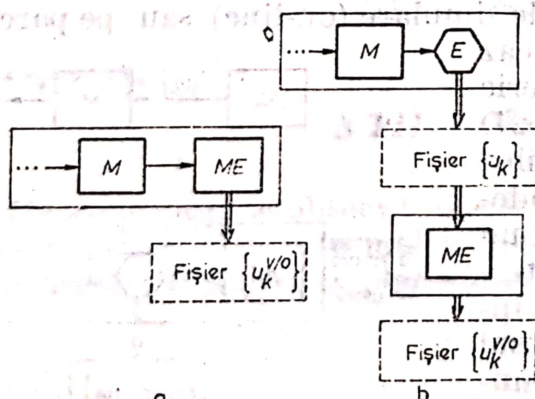


Fig. 4.3.

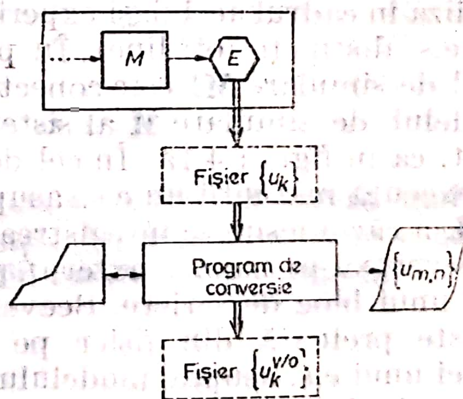


Fig. 4.4.

În cazul efectuării conversiilor de intrare şi de ieşire de către programe specializate se poate adopta soluţia implementării unui singur program destinat realizării ambelor tipuri de conversii.

## 4.2. Generarea prin simulare a secvențelor de intrare

Să considerăm transformata $z$-2D a secvenței 2D $\{u_{m,n}\}$, de dimensiuni $M$, $N$, relativ prime,

$$U(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}. \tag{4.1}$$

Aceasta poate fi privită ca transformata $z$-2D a ieșirii unui sistem discret bidimensional la intrarea căruia s-a aplicat secvența 2D, denumită *impuls unitar 2D*, definită astfel

$$\{\mathrm{iu}_{i,j} \mid \mathrm{iu}_{0,0} = 1;\ \mathrm{iu}_{i,j} = 0,\ \ i = 0, \ldots M-1,\ \ j = 0, \ldots, N-1,\ \ i+j > 0\}.$$

Transformata $z$-2D a impulsului unitar 2D este

$$\mathrm{IU}(z_1, z_2) = 1.$$

Rezultă că modelul matematic al sistemului 2D cu intrare impuls unitar și ieșirea $\{u_{m,n}\}$ este

$$U(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}\, \mathrm{IU}(z_1, z_2). \tag{4.2}$$

Dacă $M$ și $N$ sînt relativ prime, atunci se pot defini proiecțiile bidirecționale ale impulsului unitar 2D și, respectiv, modelului 2D (4.2). Acestea sînt:

$$\mathfrak{P}^s\{\mathrm{iu}_{i,j}\} = \{\mathrm{iu}_k\} = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}$$

sau

$$\mathfrak{P}^s\{\mathrm{IU}(z_1, z_2)\} = \mathrm{IU}(z) = 1$$

și, respectiv,

$$\mathfrak{P}^b\{U(z_1, z_2)\} = U(z) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z^{-iN-jM}\, \mathrm{IU}(z) \tag{4.3}$$

sau, cu notațiile din § 2.2.

$$U(z) = \sum_{g=0}^{L-1} u_g^{\#} z^{-m_g}\, \mathrm{IU}(z) \tag{4.4}$$

(unde $m_g \in S_{M,N}$, $g = 0, \ldots, L-1$, $L = M \cdot N$ și $S_{M,N}$ — mulțimea indicilor valorilor semnificative din $\{u_k\}$).

### 4.2.1. Cazul general

În cazul general modelul de simulare generator al proiecției bidirecționale a secvenței 2D $\{u_{m,n}\}$, de dimensiuni $M$, $N$ — relativ prime se implementează cel mai simplu prin intermediul unui singur bloc de întîrziere, de ordin $NT = (M-1) \cdot N + (N-1) \cdot M + 1$, cu condiții inițiale

$$\{c_k \mid k = 0, \ldots, NT-1\},$$

unde $c_k = u_k = \begin{cases} u_{i,j}, & \text{pentru } k = iN + jM,\ i = 0, \ldots, M-1,\ j = 0, \ldots N-1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

Dacă simulatorul utilizat pentru analiza asistată de calculator a sistemelor 2D operează numai cu blocuri de întîrziere, cu condiții inițiale nule, atunci modelul generator al secvenței $\{u_k\}$ se implementează ca rețea de blocuri de întîrziere și sumatoare ponderate interconectate. În cele ce urmează prezentăm două variante de m.s.r. generatoare.

**I.** Să observăm că (4.2) poate fi rescrisă astfel :

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-iN} P^i(z) =$$

$$= P^0(z) + z^{-N}(P^1(z) + z^{-N}(\ldots(P^{M-2}(z) + z^{-N}P^{M-1}(z))\ldots)),$$

unde $P^i(z) = \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} z^{-jM} \mathbf{IU}(z)$.

Cu notațiile

$$W^{M-1}(z) = P^{M-1}(z),$$

$$W^i(z) = P^i(z) + z^{-N}W^{i+1}(z) \quad i = 0, 1, \ldots, M-2,$$

rezultă că

$$U(z) = W^0(z).$$

M.s.r. generator, sintetizat pe baza relațiilor de mai sus și prezentat în figura 4.5 a, conține :

— $(N-1)$ blocuri de întîrziere de ordinul $M$, cu condiții inițiale nule, conectate în cascadă (serie) ; la intrarea cascadei se aplică impulsul unitar 2D ;

— $M$ sumatoare ponderate cu cîte maximum $(N+1)$ intrări ;

— $(M-1)$ blocuri de întîrziere de ordinul $N$, cu condiții inițiale nule.

**II.** Dacă utilizăm notațiile

$$\left.\begin{aligned} r_g &= m_g - m_{g-1}, \\ V^g(z) &= z^{-m_g}\mathbf{IU}(z), \end{aligned}\right\} g = 1, \ldots, L-1,$$

rezultă că

$$V^g(z) = z^{-r_g} V^{g-1}(z)$$

și

$$U(z) = \sum_{g=0}^{L-1} u_g^{\#} V^g(z).$$

Din configurația m.s.r. generator, sintetizat pe baza acestui model matematic (v. fig. 4.5 b), fac parte :

— $(L-1)$ blocuri de întîrziere conectate în cascadă, ale căror ordine sînt $r_g$, $g = 1, \ldots, L-1$ ; la intrarea primului bloc din această cascadă se aplică impulsul unitar 2D ;

— un sumator ponderat cu $L = M \cdot N$ intrări, ponderate cu valorile $u_g^{\#}$, $g = 0, \ldots, L-1$.

Se observă că ambele variante de m.s.r. generator au același ordin

$$NG = (M-1)N + (N-1)M,$$

dar prima dintre variante este mai ușor de construit, deoarece nu necesită o ordonare prealabilă a valorilor $u_{i,j}$, așa cum se întîmplă în cazul celei de-a doua variante.



Scanned with OKEN Scanner

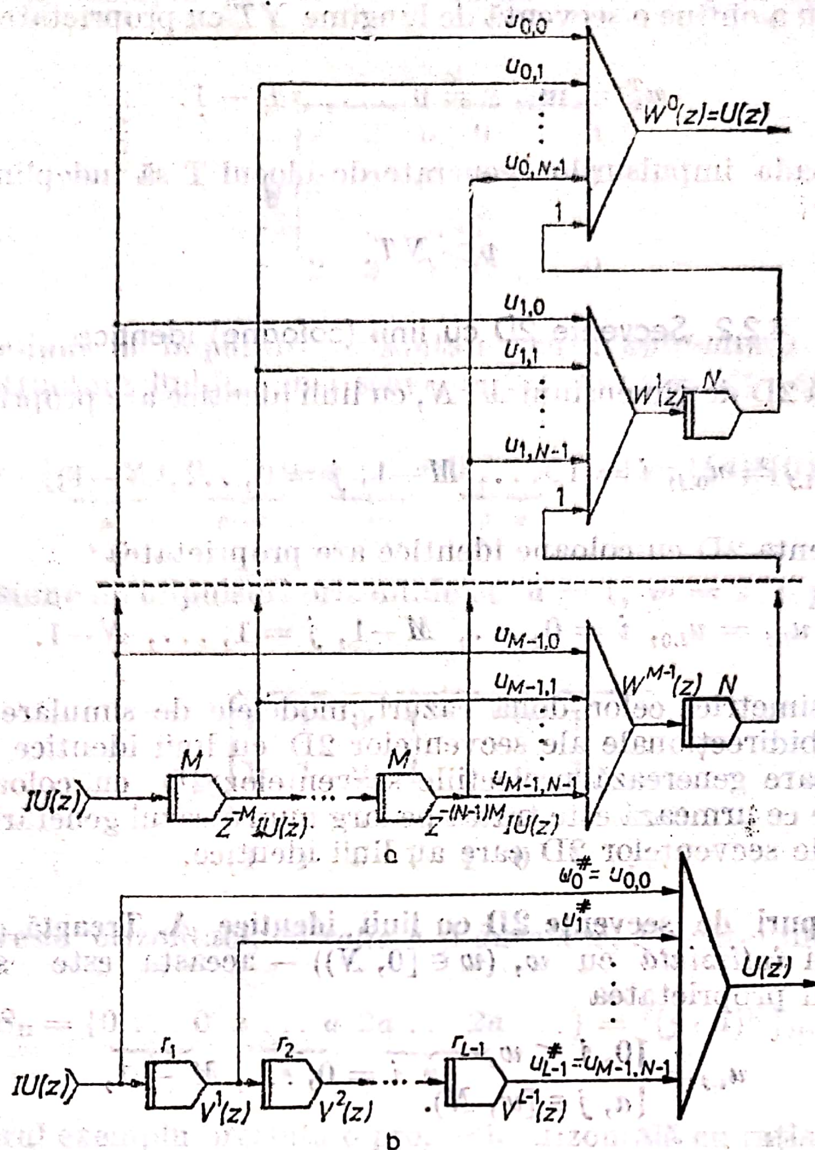



Fig. 4.5.

În figura 4.6 sînt prezentate două variante de m.s.r. generator al impulsului unitar.

În prima variantă blocul de întîrziere utilizat ca model generator nu are intrare şi deci generează secvenţa

$$\{\mathbf{iu}_k\} = \{1\ 0\ 0\ \ldots\ \}.$$

Blocul generator de impulsuri de tipul **T** din cea de-a doua variantă (fig. 4.6 b) generează secvenţa

$$\{u_k^T\} = \{1\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{p-1}\ 1\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{p-1}\ \ldots\}.$$

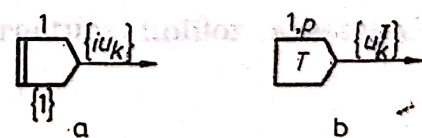



Fig. 4.6.

Deoarece numărul de momente de calcul al unui experiment de simulare pe parcursul căruia sînt prelucrate proiecţiile bidirecţionale ale secvenţelor 2D de dimensiuni $M$, $N$ — relativ prime este

$$NT = (M-1)\,N + (N-1)\,M + 1,$$

rezultă că pentru a obţine o secvenţă de lungime $NT$ cu proprietatea

$$u_k^T = \mathbf{iu}_k, \ k = 0, \ldots, NT-1.$$

trebuie ca perioada impulsurilor generate de blocul **T** să îndeplinească următoarea condiţie

$$p > NT.$$

### 4.2.2. Secvenţe 2D cu linii (coloane) identice

O secvenţă 2D de dimensiuni $M, N$, cu linii identice are proprietatea

$$u_{i,j} = u_{0,j}, \ i = 1, \ldots, M-1, \ j = 0, \ldots, N-1, \qquad (4.5)$$

în timp ce secvenţa 2D cu coloane identice are proprietatea

$$u_{i,j} = u_{i,0}, \ i = 0, \ldots, M-1, \ j = 1, \ldots, N-1. \qquad (4.6)$$

Datorită simetriei celor două cazuri, modelele de simulare generatoare ale proiecţiilor bidirecţionale ale secvenţelor 2D cu linii identice au structură similară celor care generează proiecţiile secvenţelor 2D cu coloane identice. De aceea, în cele ce urmează este tratat pe larg numai cazul generării proiecţiilor bidirecţionale ale secvenţelor 2D care au linii identice.

**4.2.2.1. Tipuri de secvenţe 2D cu linii identice A. Treaptă orizontală de** ***amplitudine a*** **şi** ***întîrziată*** **cu** ***w***, $(w \in [0, N))$ — aceasta este secvenţa 2D ale cărei linii au proprietatea

$$u_{i,j} = \begin{cases} 0, & j < w, \\ a, & j \in [w, N). \end{cases} \quad i = 0, \ldots, M-1,$$

O altă modalitate de descriere a structurii unei linii dintr-o astfel de secvenţă 2D este următoarea:

$$S_A = \{\underbrace{0 \ldots 0}_{w} \ \underbrace{a \ldots a}_{N-w}\} = \{\{0\}^w \ \{a\}^{N-w}\}. \qquad (4.7)$$

Un exemplu de treaptă orizontală, de amplitudine $a = 1$, cu $w = 2$, este următorul

$$M\left\{\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & a & a & \ldots & a \\ 0 & 0 & a & a & \ldots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a & a & \ldots & a \end{matrix}}^{N} \end{matrix}\right.$$

**B. Impuls orizontal de** ***amplitudine a*** **şi** ***durată w***, reprezentat de o secvenţă 2D ale cărei linii au structura

$$S_B = \{\underbrace{a \ldots a}_{w} \ \underbrace{0 \ldots 0}_{N-w}\} = \{\{a\}^w \ \{0\}^{N-w}\}. \qquad (4.8)$$



Scanned with OKEN Scanner

Următorul exemplu prezintă o secvență 2D — impuls orizontal cu $a = 2$ și $w = 2$

$$M\left\{\overbrace{\begin{matrix} 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{N}\right.$$

**C. Succesiune de impulsuri orizontale,** cu *amplitudinea a, durata w* și *perioada p*; structura liniilor unei secvențe 2D de acest tip este următoarea

$$S_C = \{\underbrace{a \dots a}_{w}\ \underbrace{0 \dots 0}_{p-w}\ \underbrace{a \dots a}_{w}\ \underbrace{0 \dots 0}_{p-w} \dots\} = \{\{a\}^{w}\{0\}^{p-w}\}^{*}. \tag{4.9}$$

O succesiune de impulsuri orizontale cu $a = 1$, $w = 2$ și $p = 3$ are structura

$$M\left\{\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \end{matrix}}^{N}\right.$$

**D. Progresie orizontală,** cu *rația a* și *durata w*, ale cărei linii au structura

$$S_D = \{\underbrace{0 \dots 0}_{w}\ \underbrace{a \dots a}_{w}\ \underbrace{2a \dots 2a}_{w} \dots\} = \{\{j \cdot a\}^{W}\}_{j=0,1,\dots} \tag{4.10}$$

Următorul exemplu prezintă o progresie orizontală cu rația $a = 2$ și durata $w = 2$

$$M\left\{\overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 8 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 8 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 8 & \dots \end{matrix}}^{N}\right.$$

**E. Sinus orizontal,** *eșantionat cu pasul T*; structura liniilor acestui tip de secvență 2D este următoarea

$$S_E = \{a \sin(\omega jT + \psi)\}_{j=0,1,\dots}$$

unde $a$ este amplitudinea, $\omega$ — pulsația, iar $\psi$ = faza.

**F. Funcție cu variație orizontală** — $f(x)$ — *eșantionată cu pasul T*, ale cărei linii au configurația

$$S_F = \{f(jT)\}_{j=0,1,\dots}$$

Un exemplu de astfel de funcție este exponențiala orizontală 2D, ale cărei linii au structura

$$S_{Fe} = \{ae^{-jT}\}_{j=0,1,\ldots}$$

unde $a$ este un factor de amplificare.

**4.2.2.2. Generarea proiecțiilor standard ale secvențelor 2D cu linii identice.** Proiecția standard a secvenței 2D cu proprietatea (4.5) este

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} u_{0,j}\, z^{-iN-jM} =$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} z^{-iN}\, S(z), \tag{4.11}$$

unde

$$S(z) = \sum_{j=0}^{N-1} u_{0,j}\, z^{-jM} \tag{4.12}$$

reprezintă transformata $z$ a proiecției bidirecționale a unei secvențe 2D, denumită **secvență de bază**, cu proprietatea

$$s_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j}, & i = 0, \\ 0\ , & i = 1, \ldots, M-1. \end{cases}, \quad j = 0, \ldots N-1$$

Dacă $\{s_k\}$ este proiecția standard a secvenței 2D $\{s_{m,n}\}$, atunci

$$s_k = \begin{cases} u_{0,j}, & \text{pentru } k = jM,\ j = 0, \ldots N-1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să rescriem (4.11) astfel:

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-iN} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-N}} S(z) =$$

$$= \frac{1 - z^{-N} + z^{-N} - z^{-2N} + \ldots + z^{-(N-1)M} - z^{-N\cdot M}}{1 - z^{-N}} S(z) =$$

$$= \frac{1 - z^{-N\cdot M}}{1 - z^{-N}} S(z) = U'(z) - z^{-N\cdot M}\, U'(z), \tag{4.13}$$

unde

$$U'(z) = \frac{1}{1 - z^{-N}} S(z). \tag{4.14}$$

Din (4.14) rezultă că

$$U'(z) = S(z) + z^{-N} U'(z). \tag{4.15}$$



Scanned with OKEN Scanner

Relația de recurență care generează secvența $\{u_k\}$, a cărei transformată $z$ este (4.13) este

$$u_k = u'_k - u'_{k-N\cdot M}, \tag{4.16}$$

unde

$$u'_k = s_k + u'_{k-N}. \tag{4.17}$$

**Lema 4.1.** Fie $\{u'_{m,n}\}$ o secvență 2D de dimensiuni $M$, $N$ și $\{u'_k\}$ — proiecția sa bidirecțională standard. Secvența generată de relația de recurență

$$u''_k = u'_k - u'_{k-N\cdot M}$$

are următoarele proprietăți:

a) $$\mathcal{B}^b\{u''_k\} = \mathcal{B}^b\{u'_k\} = \{u'_{m,n}\};$$

b) $$k \in R^1_{M,N} \Rightarrow u''_k = 0$$

*Demonstrație.* Notăm

$$d = k - N\cdot M.$$

În cazul $k = iN + jM$, deci $k \in S_{M,N}$, obținem

$$d = pN + jM,$$

unde $p = i - M < 0$, deci, conform lemei 2.1, rezultă că

$$d < 0 \quad \vee \quad d \in R^1_{M,N},$$

ceea ce implică

$$u'_d = 0 \Rightarrow u''_k = u'_k,$$

$$\mathcal{B}^b\{u''_k\} = \mathcal{B}^b\{u'_k\}.$$

În cazul $k \in R^1_{M,N}$, deoarece $k < (M-1)(N-1)$, obținem

$$d < 0,$$

ceea ce implică

$$u''_k = 0 \Rightarrow u''_k = u'_k.$$

Dar, conform definiției proiecției bidirecționale standard,

$$u'_k = 0, \text{ pentru } k \in R^1_{M,N}$$

deci

$$u''_k = 0.$$

Din (4.16) rezultă, conform lemei 4.1, că pentru generarea proiecției bidirecționale a unei secvențe $\{u_{m,n}\}$ cu linii identice poate fi utilizată relația de recurență (4.17).

**Lema 4.2.** Fie $\{s_{m,n}\}$ o secvență 2D și $\{s_k\}$ o secvență cu proprietatea

$$s_k = \begin{cases} s_{0,j}, & k = jM, \ j \in [0, M), \\ 0, & (k \neq jM \wedge k \in S_{M,N}) \vee k \in R^1_{M,N}. \end{cases} \tag{4.18}$$

Secvența generată de relația de recurență

$$u_k = s_k + u_{k-N}$$

are următoarele proprietăți

a) $$k \in R^1_{M,N} \Rightarrow u_k = 0\,;$$

b) $$k = iN + jM \in S_{M,N} \Rightarrow u_k = s_{0,j}.$$

*Demonstrație.* Cu notația

$$d = k - N,$$

obținem

$$u_k = s_k + u_d.$$

a. Cazul $k \in R^1_{M,N}$

În acest caz $s_k = 0$, și de asemenea, conform lemei 2.2,

$$d > 0 \Rightarrow d \in R^1_{M,N} \Rightarrow u_d = 0.$$

În concluzie

$$k \in R^1_{M,N} \Rightarrow u_k = 0.$$

b) Cazul $k = iN + jM \in S_{M,N}$

Se observă că

$$i = 0 \Rightarrow k = jM \wedge (d = -N + jM \in R^1_{M,N}),$$

$$\Rightarrow u_d = 0,$$

$$\Rightarrow u_k = s_k = s_{0,j},$$

$$i > 0 \Rightarrow k \neq jM,$$

$$\Rightarrow s_k = 0,$$

$$\Rightarrow u_k = u_{(i-1)N+jM}.$$

Prin inducție rezultă că

$$u_k = s_{jM} = s_{0,j}.$$

Se observă că deoarece

$$j \geqslant M \wedge i \in [0, N) \wedge k = iN + jM$$

$$\Rightarrow k \notin S_{M,N},$$

orice secvență $\{s_k\}$ cu proprietatea

$$s_k = \begin{cases} s_{0,j}\,, & k = jM,\ j \in [0, M), \\ x_k \in \mathbb{R}, & k = jM,\ j \geqslant M, \\ 0, & \text{în rest}, \end{cases} \tag{4.19}$$

satisface (4.18).

**Teoremă.** Sistemul modelat de (4.17) generează proiecția bidirecțională standard a unei secvențe 2D cu linii identice $\{u_{m,n}\}$ dacă la intrarea sa se aplică secvența $\{s_k\}$, denumită secvență inițială, cu proprietatea

$$s_k = \begin{cases} u_{0,j}, & \text{pentru } k = jM,\ j = 0, \ldots, N-1, \\ 0 & , \text{pentru } (k \in S_{M,N} \wedge k \neq jM) \vee k \in R^1_{M,N} \end{cases} . \tag{4.20}$$

*Demonstrație.* Conform lemei 4.2, secvența 2D $\{u_{m,n}\} = \mathcal{B}^b\{u_k = s_k + u_{k-N}\}$ are proprietatea

$$u_{i,j} = u_{iN+jM} = u_{0,j},\ i = 1, \ldots, M-1, j = 0, \ldots, N-1,$$

deci este o secvență 2D cu linii identice.

Schema-bloc a m.s.r. generator al proiecției bidirecționale a unei secvențe 2D cu linii identice este prezentată în figura 4.7, unde **Ms** reprezintă m.s.r. generator al secvenței inițiale $\{s_k\}$.

Pentru sinteza m.s.r. **Ms** se utilizează definiția structurii secvenței inițiale caracteristice fiecărui tip de secvență 2D cu linii identice.

**A.** *Treapta orizontală 2D* este caracterizată prin secvența inițială

$$\{s_k^w\} = \{0\}^{wM}\ \{a\{0\}^{M-1}\}^*.$$

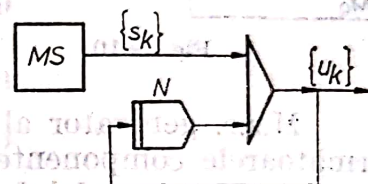


Fig 4.7.

În cazul în care $w = 0$, secvența $\{s_k^0\}$, este generată de relația de recurență

$$s_k^0 = s_{k-M}^0, \tag{4.21}$$

cu condiția inițială

$$s_0^0 = a.$$

Relația de recurență (4.21) modelează de fapt un *generator de impulsuri de amplitudine a* și *perioadă M*. Prin urmare, m.s.r. generator al secvenței $\{s_k^0\}$ poate fi implementat în una din cele două variante prezentate în figura 4.8, în funcție de facilitățile oferite de simulatorul utilizat.

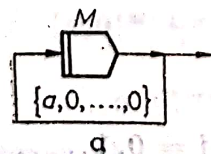
În cazul unei întîrzieri $w > 0$, secvența inițială corespunzătoare îndeplinește condiția

$$\{s_k^w\} = \{s_{k-wM}^0\},$$

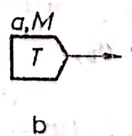
ceea ce conduce la sinteza m.s.r. generator a cărui schemă-bloc este prezentată în figura 4.9 a.

Varianta de m.s.r. generator prezentată în figura 4.9b se bazează pe presupunerea că generarea de impulsuri începe atunci cînd la intrarea blocului de tip **T** se aplică o valoare $\geqslant 0$. Acest lucru se întîmplă la momentul de calcul

$$k = wM$$

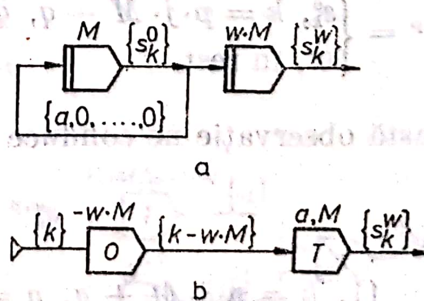


a



b

Fig. 4.8.



a

{k} -w·M O {k-w·M} a,M T {swk}

b

Fig. 4.9.

deoarece blocul de translaţie (de tip funcţional **Offset**) realizează funcţia

$$\mathbf{O}(k, -wM) = k - wM,$$

unde $k$ este indicele momentului de calcul curent al experimentului de simulare.

Este evident faptul că cea de-a doua variantă a m.s.r. generator este mult mai eficientă decît prima, al cărei ordin este

$$NS^w = M(w + 1),$$

deci creşte o dată cu creşterea lui $M$ şi (sau) a lui $w$.

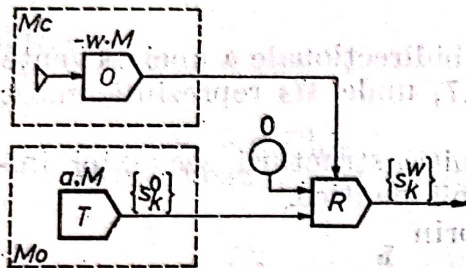



Fig. 4.10.

**B.** Secvenţa iniţială, caracteristică unei secvenţe 2D de tipul *impuls orizontal* de *amplitudine a* şi *durată w* este

$$s_k^w = \{a\{0\}^{M-1}\}^w \{0\}^*.$$

Se observă că această secvenţă are proprietatea

$$s_k^w = \begin{cases} s_k^0, & k \in [0, wM), \\ 0, & k \geqslant wM. \end{cases} \qquad (4.22)$$

M.s.r. generator al acestei secvenţe iniţiale, prezentat în figura 4.10, are următoarele componente principale :

— **Mo** — modelul *generator* al secvenţei $\{s_k^0\}$ ;

— **Mc** — model *de comandă*, care realizează funcţia

$$\mathbf{O}(k, -wM) = k - wM;$$

— blocul de tip **R** (Releu), comandat de **Mc** ; acest bloc asigură satisfacerea proprietăţii (4.22), deoarece

$$\mathbf{R}(k - w\,M, 0, s_k^0) = \begin{cases} s_k^0, & \text{pentru } k - wM < 0, \\ 0\,, & \text{pentru } k - wM \geqslant 0. \end{cases}$$

**C.** Secvenţei 2D de tip *succesiune de impulsuri* orizontale îi este caracteristică secvenţa iniţială

$$\{s_k^{w,p}\} = \{\{a\,\{0\}^{M-1}\}^w \{0\}^{(p-w)M}\}^*.$$

Se observă că

$$s_k^{w,p} = \begin{cases} s_k^0, \ k = p \cdot j \cdot M + q, \ q = 0, \ldots, (w-1)\,M, \ j = 0, 1, \ldots, \\ 0\,, \ \text{în rest.} \end{cases}$$

Această observaţie ne conduce la concluzia că

$$s_k^{w,p} = s_k^0 \cdot c_k,$$

unde

$$c_k = \begin{cases} 1, \ k = p \cdot j \cdot M + q, \ q = 0, \ldots, (w-1)\,M, \ j = 0, 1, \ldots, \\ 0, \ \text{în rest.} \end{cases}$$



Scanned with OKEN Scanner

Secvența $\{c_k\}$ reprezintă *secvența de comandă* a generării secvenței inițiale caracteristice sucesiunii de impulsuri, generare care poate fi ilustrată astfel:

| $k$ | $s_k^0$ | $c_k$ | $s_k^{w,p}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $M$ | 1 | 1 | 1 |
| $M+1$ | 0 | 1 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $2M$ | 1 | 1 | 1 |
| $2M+1$ | 0 | 1 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $(w-1)M$ | 1 | 0 | 0 |
| $(w-1)M+1$ | 0 | 0 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $wM$ | 1 | 0 | 0 |
| $wM+1$ | 0 | 0 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $pM$ | 1 | 1 | 1 |
| $pM+1$ | 0 | 1 | 0 |
| . . . | . . . | . . . | . . . |

M.s.r. generator al secvenței $\{s_k^{w,p}\}$ este prezentat în figura 4.11.

**D.** Secvența 2D de tipul *progresie* este caracterizată printr-o secvență inițială

$$\{s_k^w\} = \{\{j \cdot a\ \{0\}^{M-1}\}^w\}_{j=0,1,\ldots}$$

Fie $\{s_k^0\}$ secvența cu proprietatea

$$s_k^0 = \begin{cases} a, & k = j \cdot w \cdot M,\ j = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Secvența generată de relația de recurență

$$u_k = s_k^0 + u_{k-wM}$$

are structura următoare

$$\{u_k\} = \{a\{0\}^{M-1}\}^w\{2a\ \{0\}^{M-1}\}^w \ldots =$$

$$= \{\{a\ \{0\}^{M-1}\}^w\}_{j=0,1,\ldots}$$

Se observă că

$$s_k^w = u_{k-wM}$$

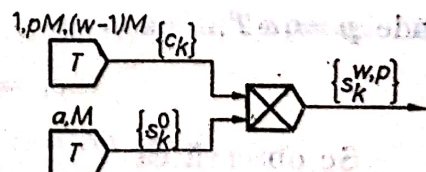



Fig. 4.11.

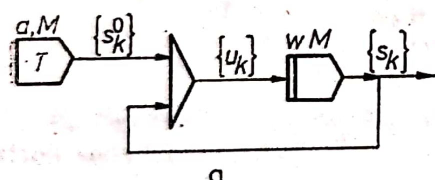
ceea ce conduce la sinteza m.s.r. a cărui schemă-bloc este prezentată în figura 4.12a. Evoluția ieșirilor blocurilor din configurația acestei variante de m.s.r. este următoarea :

| $k$ | $s_k^0$ | $u_k$ | $s_k^w$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $a$ | $a$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $M$ | $a$ | $a$ | $0$ |
| $M+1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $wM$ | $a$ | $2a$ | $a$ |
| $wM+1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $(w+1)M$ | $a$ | $2a$ | $a$ |
| $(w+1)M+1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . |
| $2wM$ | $a$ | $3a$ | $2a$ |
| $2wM+1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| . . . | . . . | . . . | . . . |

O altă variantă de m.s.r. (cea a cărui schemă-bloc este prezentată în figura 4.12b) se obține dacă se observă că

$$s_k^w = \begin{cases} \dfrac{k}{wM}\, a, & k = jM,\ j = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

deci




a

{k}
wM
{k/wM}
a,M
{s_k^0}
{s_k^w}

b

Fig. 4.12.

$$s_k^w = \frac{k}{wM} \cdot s_k^0,$$

cu $\{s_k^0\}$ — secvență de impulsuri de amplitudine $a$ și perioadă $M$. S-a presupus că blocul de împărțire (/) realizează o *împărțire cu trunchiere la întreg.*

**E.** Secvența 2D de tipul *sinus* orizontal este caracterizată de secvența inițială

$$\{s_k^T\} = \{a \sin(\omega jT + \psi)\{0\}^{M-1}\}_{j=0,1,\ldots},$$

care poate fi descrisă și sub forma

$$\{s_k^T\} = \{a \sin(p \cdot c_k + \psi)\}_{k=0,1,\ldots}$$

unde $p = \omega T$,

$$c_k = \begin{cases} j, & k = jM,\ j = 0,1,\ldots, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Se observă că

$$c_k = s_{k-M}^0 + c_{k-M} = u_{k-M},$$



Scanned with OKEN Scanner

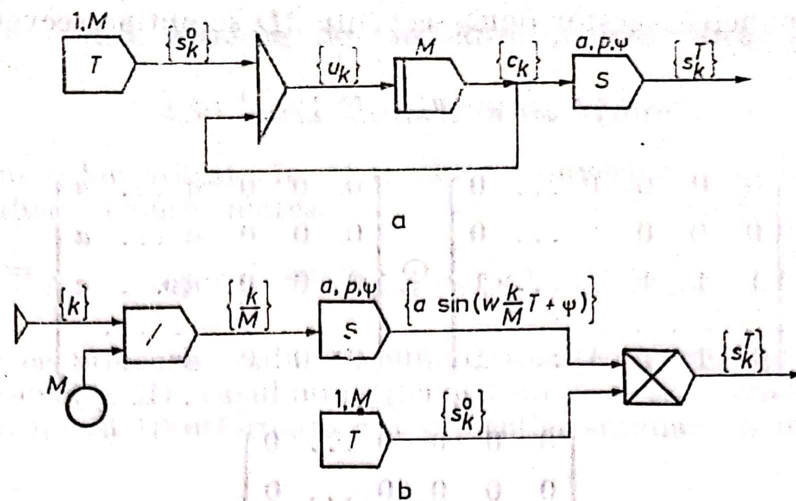



Fig. 4.13.

unde

$$s_k^0 = \{1\{0\}^{M-1}\}^*$$

şi

$$u_k = s_k^0 + c_k.$$

M.s.r. generator al secvenţei $\{s_k^T\}$, sintetizat pe baza observaţiilor anterioare este prezentat în figura 4.13a. M.s.r. din figura 4.13b a fost sintetizat pornind de la următoarea variantă de definire a secvenţei iniţiale $\{s_k^T\}$ :

$$s_k^T = a \sin\left(\omega \frac{k}{M} T + \psi\right) s_k^0. \tag{4.23}$$

**F.** Se observă că (4.23) poate fi generalizată pentru cazul oricărei funcţii $f(x)$, eşantionată cu *pasul* $T$, astfel încît

$$s_k^T = f\left(\frac{k}{M} T\right) s_k^0 = \begin{cases} f(j\,T), & k = jM, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

În acest caz m.s.r. corespunzător are aceeaşi configuraţie ca cel din fig. 4.13b, cu singura deosebire că blocul de tipul S (Sinus) se înlocuieşte cu blocul sau m.s.r. care implementează funcţia $f(x)$.

### 4.2.3. Secvenţe 2D compuse

Fie $\{u_{m,n}^o\}$, $\{u_{m,n}^v\}$ — două secvenţe 2D cu linii şi, respectiv, coloane identice. Secvenţa 2D

$$\{u_{m,n}\} = \{u_{m,n}^o\} \odot \{u_{m,n}^v\} = \{u_{m,n}^o \cdot u_{m,n}^v\}$$

este denumită secvenţă 2D *compusă*, iar operaţia $\odot$ este denumită operaţie de *compunere*.

*Exemple.* a) Fie secvenţele 2D

$\{u_{m,n}^o\}$ — treaptă orizontală de *amplitudine* 1, *întîrziată* cu $w^o = 2$;

$\{u_{m,n}^v\}$ — treaptă verticală de *amplitudine* $a$, *întîrziată* cu $w^v = 3$.



Scanned with OKEN Scanner

Prin compunerea acestor două secvenţe 2D se obţine secvenţa

$$\{u_{m,n}\} = \{u^{o}_{m,n}\} \odot \{u^{v}_{m,n}\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{Bmatrix} \odot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & a \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & a \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & a \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & a \end{Bmatrix}.$$

**b)** *Secvenţa* 2D compusă cu structura

$$\begin{Bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & a & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & a & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & a & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{Bmatrix}$$

se obţine prin compunerea unei succesiuni *de impulsuri orizontale* de *amplitudine 1*, cu *perioada* $p^o = 5$ şi *durata* $w^o = 2$, cu o *succesiune de impulsuri verticale*, de *amplitudine a*, cu *perioada* $p^v = 3$ şi *durata* $w^v = 2$.

Modelul de simulare generator al proiecţiei bidirecţionale a unei secvenţe 2D compuse, prezentat în figura 4.14., are trei componente principale:

— modelele de simulare $\mathbf{M}^o$ şi $\mathbf{M}^v$, care generează secvenţele

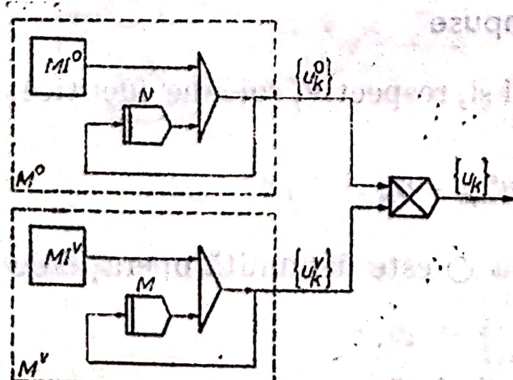



Fig. 4.14.

$$\{u^o_k\} = \mathfrak{L}^s\{u^o_{m,n}\},$$

$$\{u^v_k\} = \mathfrak{L}^s\{u^v_{m,n}\};$$

acestea includ modele de simulare $\mathbf{MI}^o$ şi $\mathbf{MI}^v$, care generează secvenţele iniţiale specifice secvenţelor 2D $\{u^o_{m,n}\}$, $\{u^v_{m,n}\}$;

— blocul de înmulţire (**X**), care implementează funcţia

$$\mathbf{X}(u^o_k, u^v_k) = u^o_k \cdot u^v_k,$$

deci generează secvenţa $\{u_k\}$ cu proprietatea

$$\mathfrak{B}^b\{u_k\} = \{u_{m,n}\}.$$



Scanned with OKEN Scanner

## 4.3. Modele de simulare „convertoare"

### 4.3.1. M.s.r. „convertor de intrare"

Conform celor arătate în §4.1. m.s.r. convertor de intrare, notat **MI**, trebuie să realizeze transformarea

$$\{u_k^{v/o}\} = \mathfrak{T}^{v/o}\{u_{m,n}\} \to \{u_k\} = \mathfrak{T}^s\{u_{m,n}\}$$

În cele ce urmează analizăm numai cazul conversiei proiecției verticale $\{u_k^v\}$ a unei secvențe 2D; cazul proiecției orizontale se tratează similar.

Reamintim că transformata $z$ a proiecției standard a unei secvențe 2D este

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j}\, z^{-(iN+jM)}, \tag{4.24}$$

iar transformata $z$ a proiecției verticale este

$$U^v(z) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} u_{i+jM}^v\, z^{-(i+jM)} = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i}\sum_{j=0}^{N-1} u_{i+jM}^v\, z^{-jM}.$$

Dacă rescriem (4.24) sub forma

$$U(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i(N-1)}\, z^{-i}\sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j}\, z^{-jM} =$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i(N-1)}\, P^i(z), \tag{4.25}$$

unde

$$P^i(z) = z^{-i}\sum_{j=0}^{N-1} u_{i+jM}^v\, z^{-jM},$$

observăm că elementele secvențelor $\{p_k^i\}$ $i = 0, \ldots, M-1$ au proprietatea

$$p_k^i = u_k^v \cdot c_k^i,$$

unde

$$c_k^i = \begin{cases} 1, & k = i + jM, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Transformatele $z$ ale secvențelor $\{c_k^i\}$ $i = 0, \ldots, M-1$ sînt

$$C^0(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^{-jM},$$

$$C^i(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^{-i}\, z^{-jM} = z^{-i}\, C^0(z) = z^{-1}\, C^{i-1}(z), \quad i = 1, \ldots, M-1.$$

Un generator de impulsuri de *amplitudine* 1 şi *perioadă* $M$, *declanşat la primul moment de calcul* (*cu indice* 0) al experimentului de simulare generează o secvenţă $\{g_k^0\}$, cu elemente

$$g_k^0 = \begin{cases} 1, & k = jM, \ j = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Deoarece proiecţia verticală are numai $L = M \cdot N$ elemente,

$$k = jM \wedge j \geqslant N \Rightarrow u_k^v = 0,$$

$$\Rightarrow u_k^v \cdot c_k^i = u_k^v \cdot g_k^i.$$

Factorizînd $z^{-(N-1)}$ în (4.25), obţinem

$$U(z) = P^0(z) + z^{-(N-1)}(P^1(z) + z^{-(N-1)}(\ldots (P^{M-2}(z) +$$

$$+ z^{-(N-1)} P^{M-1}(z)) \ldots)). \tag{4.26}$$

Dacă notăm

$$W^{M-1}(z) = P^{M-1}(z),$$

$$W^i(z) = P^i(z) + z^{-(N-1)} W^{i+1}(z), \quad i = 0, \ldots, M-2,$$

rezultă că

$$U(z) = W^0(z).$$

În concluzie, pentru a obţine, la momentul de calcul $k$ al experimentului de simulare, valoarea

$$u_k = w_k^0,$$

trebuie calculate

$$p_k^i = u_k^v \cdot g_k^i, \qquad i = 0, \ldots, M-1,$$

$$w_k^{M-1} = p_k^{M-1},$$

$$w_k^i = p_k^i + w_{k-(N-1)}^{i+1}, \quad i = 0, \ldots M-2.$$

Aceste observaţii ne conduc la sinteza unui model de simulare care include :

— un bloc generator de impulsuri de *amplitudine* 1 şi *perioadă* $M$ la ieşirea căruia se obţine secvenţa $\{g_k^0\}$ ; deoarece generarea de impulsuri trebuie să înceapă la momentul 0 al experimentului de simulare, acest bloc, de tip **T**, nu are intrare ;

— $(M-1)$ blocuri de întîrziere, de *ordinul* 1, conectate în serie ; la intrarea primului bloc de întîrziere se aplică secvenţa $\{g_k^0\}$, deci se conectează ieşirea generatorului de impulsuri ; de la ieşirile blocurilor de întîrziere din această cascadă se obţin secvenţele $\{g_k^i\}$, $i = 1, \ldots, M-1$ ;

— $M$ blocuri de înmulţire (de tip **X**), de la ieşirile cărora se obţin secvenţele $\{p_k^i\}$, $i = 0, \ldots, M-1$ ;

— $(M-1)$ sumatoare, la ieşirile cărora se obţin valorile

$$w_k^i = p_k^i + w_{k-(N-1)}^{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, M-2, \ k = 0, 1, \ldots ;$$



Scanned with OKEN Scanner

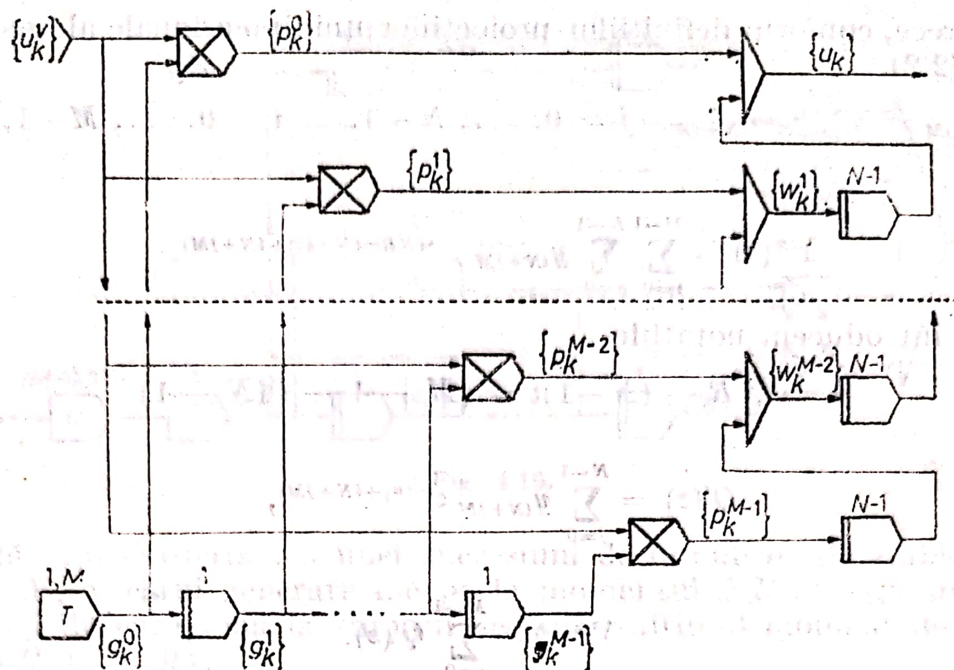



Fig. 4.15.

— $(M-1)$ blocuri de întîrziere de ordinul $(N-1)$, care întîrzie cu cîte $(N-1)$ pași secvențele $\{w_k^i\}$, $i = 1, \ldots, M-1$.

Schema bloc a modelului de simulare **MI** este prezentată în figura 4.15. Ordinul acestui m.s.r. este

$$NXMI = (M-1)\,N.$$

### 4.3.2. M.s.r. „convertor de ieșire"

Conform celor arătate în §4.1, conversia de ieșire are două variante:

a) $\{y_k\} \to \{y_k^v\} = \mathfrak{T}^v\{\mathfrak{B}^b\{y_k\}\}$;

b) $\{y_k\} \to \{y_k^o\} = \mathfrak{T}^o\{\mathfrak{B}^b\{y_k\}\}$,

unde secvența $\{y_k\}$ are $NT$ elemente,

$$NT = (M-1)N + (N-1)\,M + 1,$$

iar secvențele $\{y_k^v\}$ și $\{y_k^o\}$ au cîte $L = M \cdot N$ elemente.

Deoarece cele două cazuri sînt simulare, în cele ce urmează ne referim numai la cazul a. În acest caz realizarea prin simulare a conversiei de ieșire implică sinteza unui m.s.r. **ME**, care să realizeze transformarea

$$\{y_k\} \to \{y_k^*\} = \{0\}^{NR}\,\{y_k^v\},$$

unde $NR = (M-1)\,(N-1)$.

Transformata $z$ a secvenței $\{y_k^*\}$ este

$$Y^*(z) = z^{-NR} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} y_{i+jM}^v\, z^{-(i+jM)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} y_{i+jM}^v\, z^{-(NR+i+jM)}.$$

Deoarece, conform definițiilor proiecțiilor unidimensionale ale secvențelor 2D (vezi §2.2),

$$y^{v}_{i+jM} = y_{i,j} = y_{iN+jM}, \quad j = 0, \ldots, N-1, \qquad i = 0, \ldots, M-1,$$

rezultă că

$$Y^*(z) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} y_{iN+jM}\, z^{-(NR-(N-1)i+iN+jM)}.$$

Dacă introducem notațiile

$$n_i = NR - (N-1)i = (M-1-i)(N-1) \tag{4.27}$$

și

$$Q^i(z) = \sum_{j=0}^{N-1} y_{iN+jM}\, z^{-(n_i+iN+jM)}, \tag{4.28}$$

obținem

$$Y^*(z) = \sum_{i=0}^{M-1} Q^i(z).$$

Rezultă deci că secvența $\{y^*_k\}$ se poate obține la ieșirea unui sumator ponderat cu $M$ intrări, la care se aplică secvențele

$$\{q^i_k\}, \quad i = 0, \ldots, M-1,$$

ale căror transformate $z$ sînt $Q^i(z)$, $i = 0, \ldots, M-1$.

Din (4.28) rezultă că elementele unei astfel de secvențe au proprietatea

$$q^i_k = \begin{cases} y_{k-n_i}, & \text{pentru } k = n_i + iN + jM, \ j = 0, \ldots, N-1. \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$q^i_k = y_{k-n_i} \cdot c^i_k,$$

unde

$$c^i_k = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k = n_i + iN + jM, \ j = 0, \ldots, N-1, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \tag{4.29}$$

Se observă că:

a) transformata $z$ a secvenței $\{c^i_k\}$ este

$$C^i(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^{-(n_i+iN+jM)} = \sum_{j=0}^{N-1} z^{-(NR+i+jM)} =$$

$$= z^{-i} z^{-NR} \sum_{j=0}^{N-1} z^{-jM} =$$

$$= z^{-1} C^{i-1}(z) =$$

$$= z^{-i} C^0(z),$$

unde

$$C^0(z) = z^{-NR} \sum_{j=0}^{N-1} z^{-jM}$$

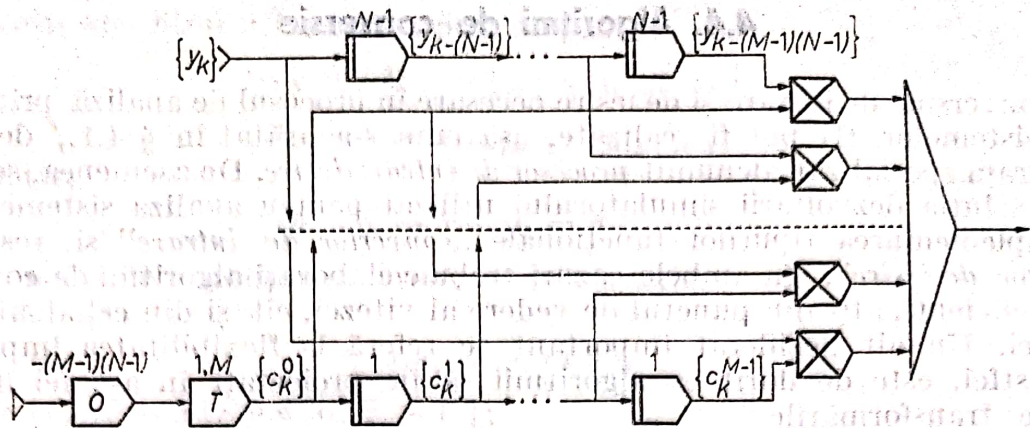



Fig. 4.16.

reprezintă transformata $z$ a unei succesiuni de impulsuri de amplitudine 1 şi perioadă $M$, a cărui generare începe la momentul $NR$ al experimentului de simulare şi durează pînă la sfîrşitul acestuia (ultimul moment de calcul este $NT = NR + N \cdot M$);

b) transformata $z$ a secvenţei $\{y_{k-n_i}\}$ este

$$Y^i(z) = z^{-n_i} Y(z) = z^{-(M-1-i)(N-1)} Y(z).$$

Rezultă deci că

$$Y^{M-1}(z) = Y(z)$$

şi

$$Y^i(z) = z^{-(N-1)} Y^{i+1}(z), \qquad i = 0, \ldots, M-2.$$

Pe baza observaţiilor anterioare se sintetizează modelul de simulare **ME**, a cărui schemă-bloc este prezentată în figura 4.16. Configuraţia acestui m.s.r., include:

— o cascadă de $(M-1)$ blocuri de întîrziere de ordinul $(N-1)$, la intrarea căreia se aplică secvenţa $\{y_k\}$: de la ieşirile blocurilor de întîrziere din această cascadă se obţin secvenţele $\{y_{k-n_i}\}$, $i = M-2, M-3, \ldots, 0$;

— modelul de simulare generator al secvenţei $\{c_k^0\}$, format dintr-un bloc generator de impulsuri de amplitudine 1 şi perioadă $M$, comandat de blocul de translaţie (de tip **O**) conectat la intrarea sa (la ieşirea blocului de translaţie se obţine secvenţa $\{k - NR\}$, care determină declanşarea generării de impulsuri la momentul $NR$ al experimentului de simulare).

— o cascadă de $(M-1)$ blocuri de întîrziere de ordinul 1, la intrarea căreia se aplică secvenţa $\{c_k^0\}$; de la ieşirile blocurilor din această cascadă se obţin secvenţele $\{c_k^i\}$, $i = 1, \ldots, M-1$;

— $M$ blocuri de înmulţire, care asigură generarea secvenţelor $\{q_k^i\}$, $i = 0, \ldots, M-1$;

— un sumator cu $M$ intrări (sau o cascadă de sumatoare echivalentă), de la ieşirea căruia se obţine secvenţa $\{y_k^*\}$.

Ordinul m.s.r. **ME** este

$$NXME = (M-1) \cdot N.$$

## 4.4. Algoritmi de conversie

Conversiile de intrare și de ieșire necesare în procesul de analiză prin simulare a sistemelor 2D pot fi realizate, așa cum s-a arătat în § 4.1., de către un program specializat, denumit *procesor de intrare/ieșire*. De asemenea, se poate adopta soluția dezvoltării simulatorului utilizat pentru analiza sistemelor 2D prin implementarea tipurilor funcționale „*convertor de intrare*" și, respectiv, „*convertor de ieșire*". În ambele cazuri trebuie elaborați algoritmi de conversie cît mai eficienți, atît din punctul de vedere al vitezei, cît și din cel al utilizării memoriei. Un alt deziderat important se referă la flexibilitatea implementării. Astfel, este de dorit ca algoritmii să fie proiectați în așa fel încît să realizeze transformările

$$\{xx_k\} \rightarrow \{x_k\}$$

sau

$$\{x_k\} \rightarrow \{xx_k\}.$$

unde

$$\{xx_k\} = \mathfrak{T}^{v/0}\{x_{m,n}\},$$

$$\{x_k\} = \mathfrak{T}^{s}\{x_{m,n}\},$$

în funcție de opțiunea utilizatorului, care precizează atît tipul conversiei dorite — *de intrare sau de ieșire*, cît și tipul proiecției $\{xx_k\}$ — *verticală sau orizontală*.

În cele ce urmează utilizăm notațiile:

*ip* — indicatorul tipului proiecției $\{xx_k\}$,

$$ip = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \{xx_k\} = \mathfrak{T}^{o}\{x_{m,n}\}; \\ 2, \text{ dacă } \{xx_k\} = \mathfrak{T}^{v}\{x_{m,n}\}; \end{cases}$$

*G* — factor de grupare a valorilor din $\{xx_k\}$.

$$G = \begin{cases} N, \text{ dacă } ip = 1, \\ M, \text{ dacă } ip = 2; \end{cases}$$

*H* — număr de grupuri de cîte *g* valori din $\{xx_k\}$,

$$H = \begin{cases} M, \text{ dacă } ip = 1, \\ N, \text{ în caz contrar}; \end{cases}$$

*f2D* — identificatorul fișierului secvențial în care sînt înregistrate cele $L = M \cdot N$ valori din $\{xx_k\}$;

*f1D* — identificatorul fișierului secvențial în care sînt înregistrate cele $NT$ valori din $\{x_k\}$,

$$NT = (M-1)N + (N-1)M + 1.$$

Cei mai simpli algoritmi de conversie intrare/ieșire, notați CIS și respectiv CES, păstrează în memorie, într-un vector de lucru $X$, toate elementele secvenței $\{x_k\}$, deci au ordinul

$$NXS = NT.$$

Acești algoritmi utilizează faptul că pentru

$$\forall i \in [0, M-1] \wedge j \in [0, N-1],$$

$$ip = 1 \Rightarrow x_{iN+jM} = xx_{iN+j}.$$

și, respectiv,

$$ip = 2 \Rightarrow x_{iN+jM} = xx_{i+jM}.$$

Cu notațiile introduse anterior, se poate scrie
a) în cazul $ip = 1$,

$$x_{qG+pH} = xx_{qG+p},$$

unde $q \in [0, H-1] \wedge p \in [0, G-1]$;
b) în cazul $ip = 2$,

$$x_{pH+qG} = xx_{p+qG},$$

unde $p \in [0, G-1] \wedge q \in [0, H-1]$.

Se observă că s-a ajuns la o descriere identică pentru ambele cazuri, deci algoritmii care realizează conversiile propriu-zise sînt independenți de tipul proiecției $\{xx_k\}$.

Pentru a crește viteza de conversie, în elaborarea algoritmilor CIS și CES au fost utilizate următoarele observații:

**a.** Pe parcursul tratării grupului $q$ (deci a liniei sau coloanei $q$ a secvenței 2D) valoarea $ig = qG$ este constantă; inițial $ig = 0$ și crește cu $G$, atunci cînd se trece la tratarea grupului următor.

Prelucrarea secvențială a grupurilor din $\{xx_k\}$, în cazul în care *grupurile reprezintă linii*, este ilustrată în cele ce urmează:

| $q$ | $ig = qG$ | $x_{ig}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $xx_0 = x_{0,0}$ |
| 1 | $G$ | $xx_G = x_{1,0}$ |
| . . . | . . . | . . . |
| $q$ | $qG$ | $xx_{qG} = x_{q,0}$ |
| $q+1$ | $(q+1)G$ | $xx_{(q+1)G} = x_{q+1,0}$ |
| . . . | . . . | . . . |

**b.** Pe parcursul tratării elementelor unui grup $q$, indicele

$$k = ig + pH, \quad ig = qG$$

are valoarea inițială $k = ig$ și crește cu $H$ atunci cînd se trece la tratarea următorului element din grup. Tratarea secvențială a elementelor grupului $q$, în cazul în care aceste este o *linie*, poate fi ilustrată astfel:

| $p$ | $k = ig + p \cdot H$ | $x_k$ |
|---|---|---|
| 0 | $ig$ | $xx_{ig} = x_{q,0}$ |
| 1 | $ig + H$ | $xx_{ig+1} = x_{q,1}$ |
| . . . | . . . | . . . |
| $G-1$ | $ig + (G-1)H$ | $xx_{ig+G-1} = x_{q,G-1}$ |



Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează sînt date descrierile în pseudocod ale algoritmilor de conversie CIS și CES :

```
                    algoritm CIS este
*deschide fișierele f2D și f1D;
*citește ip, M, N;
dacă ip = 1 atunci atribuie G ← N
|                  | & H ← M
|                  ;
|           altfel atribuie G ← M
|                  | & H ← M
;                  ;
/* Calculează nu = NT − 1 — indicele ultimei valori din {x_k}*/
atribuie nu ← (G − 1)H + (H − 1)G;
/*Inițializează vectorul de lucru X */
pentru i = 0, nu repetă
|    atribuie X_i ← 0;
;
atribuie ig ← 0;
pentru q = 0, H − 1 repetă
|    /* Prelucrează grupul q */
|    atribuie k ← ig;
|    pentru p = 0, G − 1 repetă
|    |    *citește X_k din fișierul f2D;
|    |    /* X_k = x_{q,p} dacă ip = 1, altfel X_k = x_{p,q} */
|    |    atribuie k ← k + H;
|    ;
|    atribuie ig ← ig + G;
;
/* Înregistrează valorile din vectorul X în fișierul f1D */
pentru i = 0, nu repetă
|    * scrie X_i în fișierul f1D;
;
    sfîrșit
```

Se observă că algoritmul CIS poate fi optimizat dacă ciclurile cu contor $q = 0, 1, \ldots, H-1$ și, respectiv, $p = 0, 1, \ldots, G-1$ se înlocuiesc prin cicluri cu contor $ig = 0, G, \ldots, (H-1)G$, și, respectiv,

$$k = ig, ig + H, \ldots, uk,$$

unde $uk = ig + (G-1)H$.

Se elimină astfel $(G+1)$ atribuiri, deci crește viteza de conversie. Această optimizare apare în algoritmul CES :

```
                    algoritm CES este
*deschide fișierele f1D și f2D;
*citește ip, M, N;
dacă ip = 1 atunci atribuie G ← N
|                  | & H ← M
|                  ;
|           altfel atribuie G ← M
|                  | & H ← N
;                  ;
```

```
atribuie nu ← (G − 1)H + (H − 1)G;
/* Preia secvenţa {x_k} din fişierul f1D*/
pentru i = 0, nu repetă
|        * citeşte X_i din fişierul f1D;
;
atribuie a ← (G − 1) H & b ← (H − 1)G;
pentru ig = 0, b, G repetă
|    /*Prelucrează valorile dintr-un grup */
|      atribuie uk ← ig + a;
|      pentru k = ig, uk, H repetă
|      |      * scrie X_k în fişierul f2D;
;      ;
                    sfîrşit
```

Dimensiunile maxime ale secvenţelor ce pot fi prelucrate de programele care implementează aceşti algortimi sînt condiţionate de dimensiunea vectorului de lucru $X$. Prelucrarea unor secvenţe de dimensiuni mai mari impune optimizarea algoritmilor de conversie, astfel încît să se asigure o utilizare mai eficientă a memoriei. Faptul că modelele de simulare convertoare de intrare/ieşire, prezentate în §4.3, au ordinul $(M - 1)\, N$ ne conduce la concluzia că există algoritmi de conversie de ordin comparativ, adică $(G - 1)H$.

Să observăm că cele $G$ elemente dintr-un grup $q$ (linie sau coloană) ocupă în secvenţa $\{x_k\}$ poziţiile

$$k = ig + pH, \qquad p = 0,1, \ldots, G-1, \qquad ig = qG,$$

deci sînt memorate într-un subşir de lungime

$$ng = 1 + (G - 1)H.$$

În prelucrarea următoarelor grupuri de elemente (citite sau scrise, în funcţie de tipul conversiei) se utilizează subşiruri de aceeaşi lungime $ng$, dar decalate consecutiv la dreapta cu cîte $G$ poziţii, aşa cum se arată în figura 4.17, unde

$$a = (G - 1)H = ng - 1$$

După prelucrarea unui grup şi a primelor $G$ valori din subşiruri corespunzător, zona ocupată de aceste $G$ valori devine disponibilă. Ea poate fi deci utilizată pentru memorarea ultimelor $G$ elemente din subşirul corespunzător grupului următor, *pe principiul cozii circulare*. Pornind de la aceste observaţii au fost elaboraţi algoritmii de conversie CIO şi CEO, care utilizează mai eficient memoria, dar sînt mai puţin rapizi decît algoritmii CIS şi, respectiv CES.

Ordinul acestor algoritmi este

$$NXO = 1 + (G - 1)H,$$

deci

$$NXS = NXO + (H - 1)G.$$

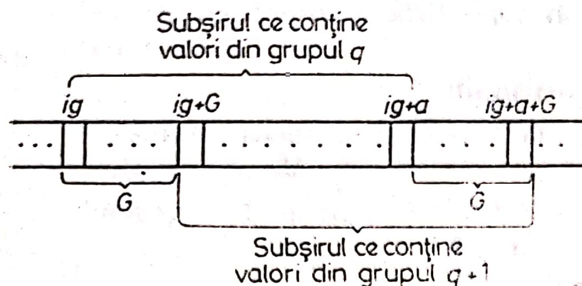



Fig. 4.17.

Rezultă că, în cazul utilizării unor vectori de lucru de dimensiuni egale, algoritmii optimizaţi pot prelucra secvenţe $\{xx_k\}$ cu număr maxim de elemente practic dublu faţă de cel al secvenţelor ce pot fi prelucrate de algoritmii neoptimizaţi.

Scăderea vitezei în cazul algoritmilor optimizaţi din punct de vedere al utilizării memoriei se datorează faptului că folosirea vectorului de lucru $X$ în regim de coadă circulară implică determinarea valorilor efective ale indicilor elementelor prelucrate printr-o operaţie modulo $ng$.

În algoritmii CIO şi CEO, prezentaţi în cele ce urmează, se utilizează aceleaşi notaţii ca şi în algoritmii CIS şi CES.

```
                    algoritm CIO este
*deschide fişierele f1D şi f2D;
*citeşte ip, M, N;
dacă ip = 1   atunci atribuie G ← N & H ← M;
|             altfel atribuie G ← M & H ← N;
;
atribuie a ← (G−1)H
|     & ng ← a + 1
|     & b ← (H−1)G
;
/* Iniţializează vectorul de lucru X*/
pentru  i = 0, a  repetă
|          atribuie X_i ← 0;
;
atribuie ke ← −1;
pentru ig = 0, b, G repetă
|     /* Prelucrează elementele unui grup */
|     pentru k = ig, ig + a, H  repetă
|     |     atribuie ki ← mod(k, ng)
|     |         &  ke ← mod(ke + 1, ng)
|     |     *citeşte X(ki) din fişierul f2D;
|     |     *scrie X(ke) în fişierul f1D;
|     |     atribuie X(ke) ← 0;
|     |     /* Valorile transferate în fişierul f1D sînt şterse din vectorul de lucru
|     |     X */
;     ;
/* În fişierul f1D au fost transferate G·H valori. Au mai rămas de transferat
NR = (G − 1)(H − 1) valori, cu indici ke=mod(k, ng), k = G·H, ..., a + b.*/
pentru k = G·H, a + b repetă
|     atribuie ke ← mod (k, ng);
|     *scrie X(ke) în fişierul f1D;
;
              sfîrşit
```

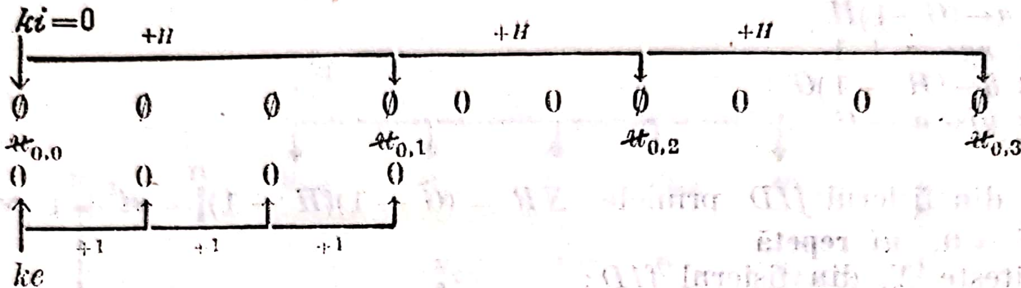
Pentru exemplificare am ales cazul unei secvenţe 2D $\{u_{m,n}\}$ de dimensiuni $M = 3$ şi $N = 4$, a cărei proiecţie orizontală a fost înregistrată în fişierul $f2D$.

În acest caz variabilele de lucru au valorile :

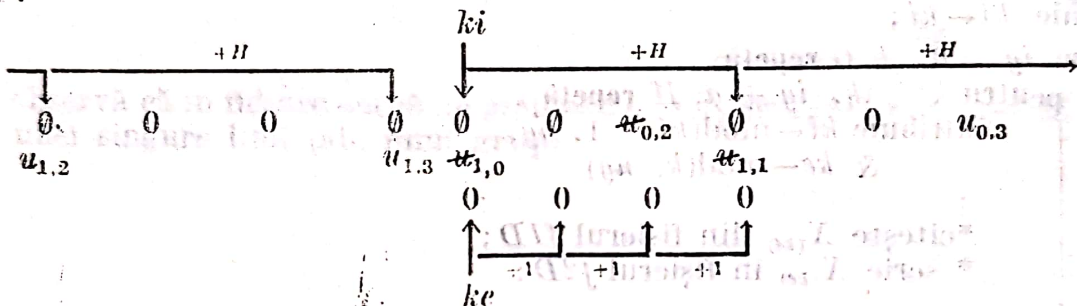
| $ip$ | $G$ | $H$ | $a$ | $ng$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 9 | 10 | 8 |

deci pentru efectuarea conversiei este necesar un vector de lucru cu 10 elemente. Modificările aduse conținutului vectorului de lucru $X$ pe parcursul prelucrării liniilor $q = 0, 1, 2$, sînt următoarele :

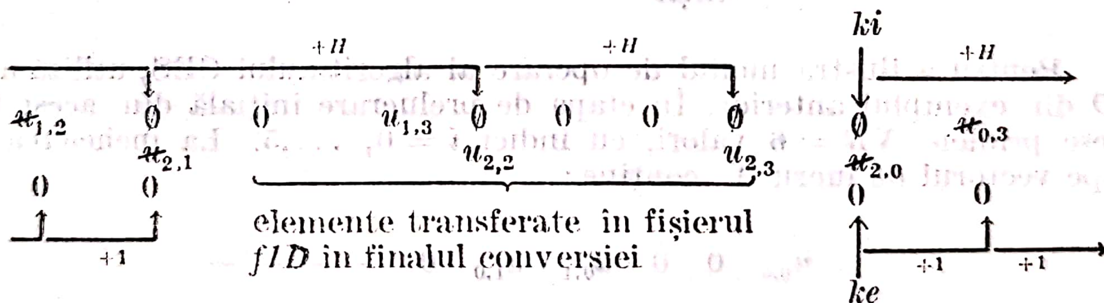
$q = 0$ :



$q = 1$ :



$q = 2$ :




Structura fișierului $f1D$ la sfîrșitul prelucrărilor este următoarea :

| $k =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $u_{0,0}$ | 0 | 0 | $u_{0,1}$ | $u_{1,0}$ | 0 | $u_{0,2}$ | $u_{1,1}$ | $u_{2,0}$ | $u_{0,3}$ | $u_{1,2}$ | $u_{2,1}$ | 0 | $u_{1,3}$ | $u_{2,2}$ | 0 | 0 | $u_{2,3}$ |
| | transferate pentru : $q=0$ | | | | $q = 1$ | | | | $q = 2$ | | | | transferate în finalul conversiei | | | | | |

Se observă că :

**a.** Ordinea impusă de definiția proiecției bidirecționale este respectată — elementul $u_{i,j}$ ocupă în fișierul $f1D$ poziția

$$k = iN + jM.$$



Scanned with OKEN Scanner

**b.** Prima valoare din fiecare grup este transferată în fișierul *f1D* imediat ce a fost citită din fișierul *f2D*.

**algoritm CEO este**

```
*deschide fişierele f1D şi f2D ;
* citeşte ip, M, N ;
dacă ip = 1  atunci atribuie   G←N & H←M ;
|              altfel  atribuie   G←M & H←N ;
;
atribuie a←(G—1)H
|        & ng←a + 1
|        & b←(H — 1)G
|        & ui←a — G
;
/* preia din fişierul f1D primele NR = (G — 1)(H — 1)]= ui + 1 valori */
pentru i = 0, ui repetă
|       *citeşte X_i din fişierul f1D ;
;
atribuie ki←ui ;
pentru ig = 0, b, G repetă
|       pentru k = ih, ig + a, H repetă
|       |       atribuie ki←mod(ki + 1, ng)
|       |       |        & ke←mod(k, ng)
|       |       ;
|       |       *citeşte X_(ki) din fişierul f1D ;
|       |       * scrie X_(ke) în fişierul f2D ;
;       ;
```

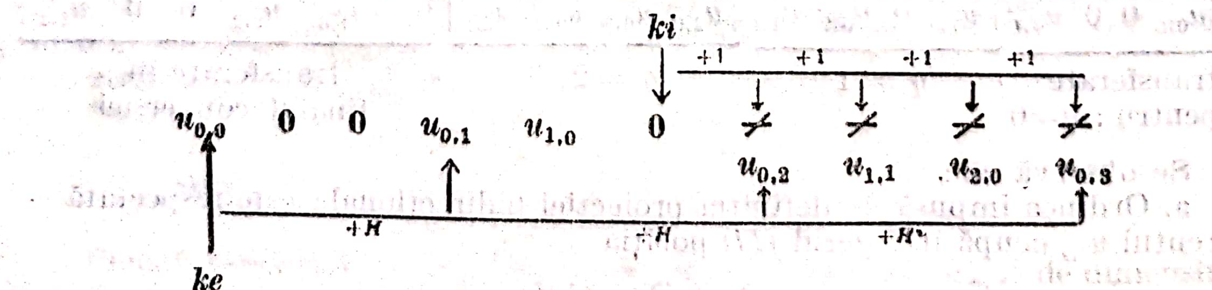
**sfîrșit**

Pentru a ilustra modul de operare al algoritmului CES, utilizăm fișierul *f1D* din exemplul anterior. În etapa de prelucrare inițială din acest fișier se citesc primele $NR = 6$ valori, cu indici $i = 0, \ldots, 5$. La încheierea acestei etape vectorul de lucru $X$ conține ;

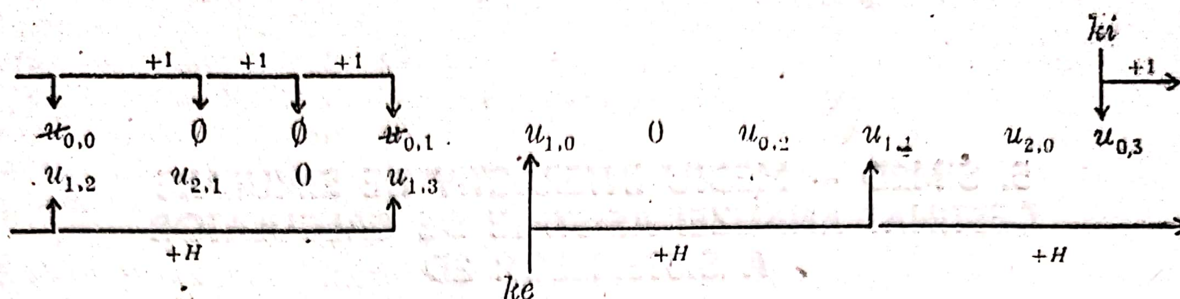
$$u_{0,0} \quad 0 \quad 0 \quad u_{0,1} \quad u_{1,0} \quad 0 \quad — — — —$$

Modificările aduse conținutului vectorului $X$ în etapele de prelucrare a liniilor $q = 0, 1, 2$, sînt următoarele :

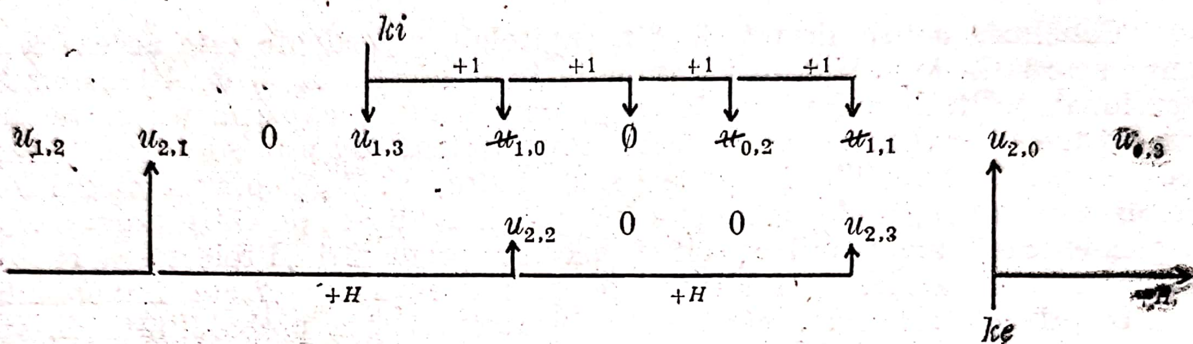
$q = 0$ :



$q = 1:$




$q = 2:$




Se observă că în fiecare etapă de prelucrare în fișierul *f1D* se transferă elementele unei singure linii (ale unui grup).

# 5. SIM2D – MEDIU INTERACTIV DE SIMULARE DESTINAT ANALIZEI ASISTATE DE CALCULATOR A SISTEMELOR 2D

## 5.1. Structura SIM2D

Concluzia ce se desprinde din capitolele precedente este aceea că asistența acordată de calculatorul numeric în domeniul analizei sistemelor bidimensionale nu trebuie limitată la etapa de execuție a experimentelor de simulare, ci trebuie extinsă și la celelalte etape ale analizei prin simulare. Aceasta, deoarece atît conversiile de intrare și de ieșire, cît și elaborarea modelelor de simulare de tip rețea ale sistemelor 2D pot fi realizate de către programe care implementează algoritmii specifici acestor prelucrări. Proiectarea și implementarea unor astfel de instrumente de asistență are efecte importante în ceea ce privește reducerea efortului utilizatorului și a probabilității de apariție a erorilor în procesul de analiză prin simulare.

Ansamblul programelor puse la dispoziția utilizatorilor în scopul realizării analizei asistate de calculator a sistemelor, folosind ca tehnică de bază simularea, este denumit *mediu de simulare*. Un mediu de simulare poate fi implementat efectiv fie ca pachet de programe distincte, fie printr-un singur program, care oferă o gamă largă de facilități de prelucrare. Prima variantă de implementare se adoptă în special în cazul în care se lucrează pe calculatoare de capacitate mică, iar cea de-a doua în cazul în care implementarea mediului de simulare se realizează pe calculatoare de capacitate medie (mare).

Componenta de bază a unui mediu de simulare este *simulatorul*. Acesta constituie nucleul în jurul căruia se dezvoltă mediul de simulare, prin adăugarea de noi componente (facilități), proiectate astfel încît să răspundă necesităților utilizatorilor și să se integreze armonios în ansamblul componentelor existente.

În cazul unui mediu de simulare dedicat sistemelor discrete bidimensionale, cea de-a doua componentă esențială este *procesorul de intrare/ieșire*. Acesta trebuie să asigure realizarea corectă și eficientă a conversiilor de intrare și de ieșire specifice analizei prin simulare a sistemelor 2D.

Dacă simulatorul utilizat operează cu modele de simulare de tip rețea, dar repertoriul său de tipuri funcționale predefinite nu include tipul „sistem 2D", atunci se poate proceda fie la extinderea repertoriului, fie la implementarea unui program care să preia sarcina elaborării m.s.r. ale sistemelor 2D. Un astfel de program, denumit *generator de modele de simulare* are rolul de a asigura traducerea automată a descrierii modelului matematic, de tip funcție de transfer sau relație de recurență, al sistemului 2D analizat în limbajul de descriere a m.s.r. specific simulatorului utilizat pentru execuția experimentelor de simulare.

De asemenea, este unanim recunoscut faptul că în domeniul analizei și proiectării asistate de calculator un rol important îl au reprezentările grafice, care sînt în măsură să ofere informații calitative și cantitative de mare interes pentru utilizator. În cazul în care mediul de simulare a sistemelor

2D este implementat pe un sistem de calcul ce dispune şi de facilităţi grafice, este deosebit de utilă proiectarea şi implementarea unui *procesor de reprezentare grafică a secvenţelor 2D*. Acesta trebuie proiectat astfel încît să ofere o gamă cît mai largă de facilităţi de reprezentare grafică a intrărilor şi ieşirilor sistemelor 2D. Anumite facilităţi de reprezentare grafică a rezultatelor analizei prin simulare pot fi înglobate chiar în cadrul simulatorului utilizat pentru realizarea experimentelor de simulare, dar de regulă gama acestora este foarte restrînsă.

Proiectarea şi implementarea *eficientă* a componentelor unui mediu de simulare presupune alegerea acelor soluţii care asigură o clasă cît mai largă de facilităţi de prelucrare, în condiţiile utilizării eficiente a resurselor sistemului de calcul (în principal memorie şi timp). Astfel, în cazul procesorului de intrare/ieşire 2D interesează asigurarea posibilităţii de prelucrare rapidă a unor secvenţe 2D de dimensiuni cît mai mari, iar în cazul generatorului de modele de simulare accentul cade asupra generării unor m.s.r. optime din punctul de vedere al criteriului considerat — ordin minim, număr minim de blocuri în configuraţia m.s.r., număr minim de operaţii implicate de acestea.

Un alt aspect important al proiectării componentelor unui mediu de simulare îl constituie *proiectarea comunicaţiei (interfeţei) cu utilizatorul*. Aceasta are un rol major în ceea ce priveşte eficienţa utilizării mediului de simulare, mai ales în cazul în care sistemul de calcul pentru care este proiectat mediul de simulare este exploatat în regim interactiv (conversaţional). În acest caz comunicaţia cu utilizatorul se realizează sub formă de dialog. Dintre principalele deziderate ce trebuie luate în considerare în etapa de proiectare a dialogului cu utilizatorul menţionăm :

— informarea permanentă a utilizatorului, prin mesaje clare şi concise, asupra prelucrărilor posibile la un moment dat şi a modului de descriere a acestora ;

— reducerea cantităţii de date ce trebuie introduse de către utilizator în regim de dialog ;

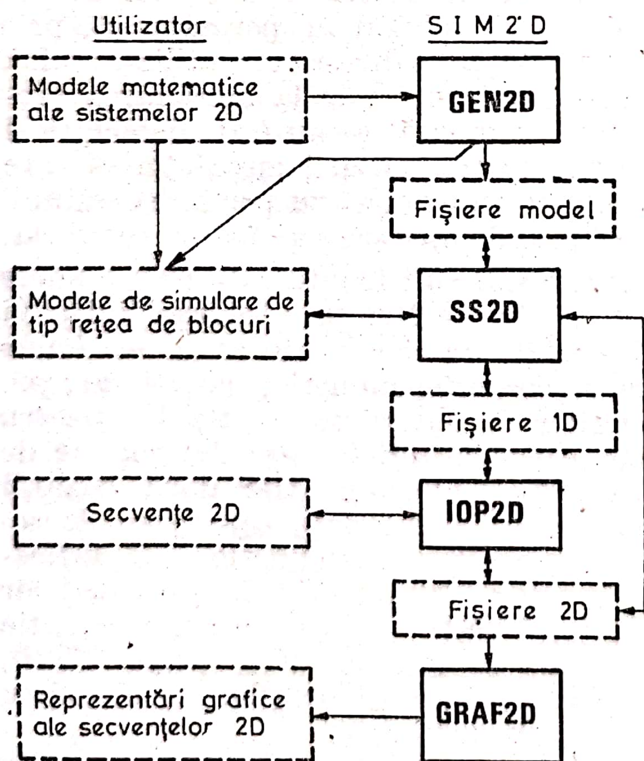


Fig. 5.1.

— semnalarea promptă a erorilor detectate şi asigurarea posibilităţii de corectare cît mai simplă şi rapidă a acestora ;

— realizarea cît mai simplă a descrierii următoarei prelucrări, în cazul în care aceasta reprezintă o variantă a celei curente. În acest caz este de dorit ca descrierea următoarei prelucrări să se limiteze la descrierea acelor elemente ce o diferenţiază de prelucrarea curentă.

Toate aceste aspecte ale proiectării şi implementării unui mediu de simulare au fost luate în considerare în procesul de dezvoltare a *mediului interactiv de simulare* **SIM2D**. Acesta este destinat analizei asistate de calculator a sistemelor discrete bidimensionale şi utilizează ca suport de implementare sisteme de calcul de producţie românească — microcalculatoarele FELIX M18/118 şi minicalculatoa-



Scanned with OKEN Scanner

rele CORAL 4001/4011. Utilizarea limbajului Fortran ca limbaj de implementare conferă un înalt grad de portabilitate acestui mediu interactiv de simulare a sistemelor 2D.

În figura 5.1 sînt prezentate *componentele de bază* ale mediului de simulare **SIM2D**, precum şi interfeţele existente atît între componente, cît şi între mediul de simulare şi utilizator.

Componentele **SIM2D** realizează următoarele tipuri de prelucrări :

**SS2D** — experimente de simulare asupra m.s.r. ale sistemelor 2D ;

**IOP2D** — conversii de intrare şi de ieşire; această componentă operează cu două tipuri de fişiere — fişiere S(1D), în care se înregistrează proiecţiile bidirecţionale standard ale secvenţelor 2D, şi, respectiv, fişiere M(2D), în care se înregistrează proiecţii verticale sau orizontale ale secvenţelor 2D ;

**GRAF2D** — reprezentări grafice ale secvenţelor 2D ;

**GEN2D** — generarea m.s.r. ale sistemelor 2D cu model matematic de tip funcţie de transfer sau relaţie de recurenţă 2D şi integrarea modulelor rezultante în modele de simulare complexe.

## 5.2. Simulatorul SS2D

### 5.2.1. Prezentare generală

Simulatorul SS2D, *principala componentă a mediului interactiv de simulare* **SIM2D**, este un interpretor al limbajului de descriere a *modelelor de simulare de tip reţea de blocuri* şi al experimentelor de simulare efectuate asupra acestora. **SS2D** operează în regim *interactiv*, indicînd în permanenţă, prin *mesaje explicite*, semnificaţia răspunsurilor aşteptate din partea utilizatorului. Acestea au în general o formă simplă, ceea ce contribuie la micşorarea probabilităţii de eroare. *Erorile* sînt semnalate deîndată ce au fost detectate şi se solicită corectarea lor imediată prin reluarea afişării mesajului la care s-a răspuns incorect. Clasa erorilor fatale, care au ca efect suspendarea sesiunii de lucru cu simulatorul şi revenirea în sistemul de operare este foarte restrînsă.

Blocurile din configuraţia unui m.s.r. **SS2D** sînt identificate prin numere de identificare, iar specificarea tipului unui bloc se face prin intermediul unui caracter alfanumeric. În funcţie de tipul asociat, un bloc poate avea *maximum 3 intrări*, notate *i*1, *i*2, *i*3, şi *maximum 3 parametri* numerici, notaţi *p*1, *p*2, *p*3. Un caz particular este cel al blocurilor de întîrziere (de tip **U**), pentru care numărul de parametri reprezentînd *condiţii iniţiale* este determinat de valoarea parametrului *p*1, care specifică *ordinul* blocului. Alte două excepţii sînt reprezentate de *blocurile de citire şi respectiv de scriere*, care, spre deosebire de celelalte tipuri de blocuri, au un parametru alfanumeric — *identificatorul fişierului* din (în) care se transferă valori. Caracteristicile principalelor tipuri de blocuri predefinite de simulatorul **SS2D** sînt prezentate sintetic în tabelul 5.1. Numărul maxim de blocuri din configuraţia unui m.s.r. **SS2D**, precum şi ordinul acestuia, definit ca suma ordinelor blocurilor de întîrziere din m.s.r., sînt dependente de varianta de implementare.

În afara blocurilor declarate de utilizator, din m.s.r. **SS2D** fac parte implicit blocurile predefinite *generator de tact* şi *nul*. *Blocul generator de tact*,



Scanned with OKEN Scanner

*Tabelul 5.1*

| Tip | Funcția asociată | Intrări | Parametri | Ieșire, observații |
|---|---|---|---|---|
| B | extragere semn | $i1$ | — | $e = \begin{cases} -1, \text{ dacă } i1 < 0 \\ 0, \text{ dacă } i1 = 0 \\ 1, \text{ dacă } i1 > 0 \end{cases}$ |
| C | citire din fișier | fișier secvențial pe disc | identificator fișier | $e = \begin{cases} \text{valoarea citită din fișier} \\ 0, \text{ dacă s-a ajuns la sfîrșitul fișierului} \end{cases}$ |
| D | zonă de insensibilitate | $i1$ | $p1$, $p2$ <br> $p1 > p2$ | $e = \begin{cases} i1 - p1, \text{ dacă } i1 > p1 \\ i1 - p2, \text{ dacă } i1 < p_2 \\ 0, \text{ dacă } i1 \in [p2, p1] \end{cases}$ |
| E | scriere în fișier | $i1$ | identificator fișier | $e = i1$; valoarea de intrare este transferată în fișierul asociat |
| G | amplificare | $i1$ | $p1$ | $e = i1 \cdot p1$ |
| H | radical | $i1$ | — | $e = i1$; întrerupe e.s., dacă $i1 < 0$ |
| K | constantă | — | $p1$ | $e = p1$ |
| L | limitator | $i1$ | $p1$, $p2$ <br> $p1 > p2$ | $e = \begin{cases} i1, \text{ dacă } i1 \in [p2, p1] \\ p1, i1 < p1;\ p_2, i1 \lhd p2 \end{cases}$ |
| M | valoare absolută | $i1$ | — | $e = \lvert i1 \rvert$ |
| O | translație | $i1$ | $p1$ | $e = i1 + p1$ |
| Q | întrerupere | $i1$, $i2$ | — | întrerupe execuția e.s., dacă $i1 > i2$ |
| R | releu | $i1$, $i2$, $i3$ | — | $e = \begin{cases} i2, \text{ dacă } i1 \geqslant 0 \\ i3, \text{ dacă } i1 < 0 \end{cases}$ |
| S | sinus | $i1$ | $p1$, $p2$, $p3$ | $e = p1 \cdot \sin(p2 \cdot i1 + p3)$ |
| T | generare impulsuri | $i1$ | $p1$ — amplitudine <br> $p_2$ — perioadă <br> $p3$ — durată <br> $p1 \neq 0$; $p2 \geqslant 1$ | generarea de implsuri se declanșează pentru $i \geqslant 0$ |
| U | întîrziere | $i1$ | $p1$ — ordin <br> $\{c_i\}$, $i = 0, \ldots,$ $p1 - 1$ condiții inițiale | $e = \begin{cases} c_k & k = 0, \ldots, p1 - 1 \\ i1_{k-p1} & k \geqslant p1 \end{cases}$ |
| W | sumă ponderată | $i1$, $i2$, $i3$ | $p1$, $p2$, $p3$ | $e = p1 \cdot i1 + p2 \cdot i2 + p3 \cdot i3$ |
| + | sumă | $\pm i1$, $\pm i2$, $\pm i3$ | — | $e = \pm i1 \pm i2 \pm i3$ |
| X | produs | $i1$, $i2$ | — | $e = i1 \cdot i2$ |
| I | împărțire | $i1$, $i2$ | — | $e = i1/i2$; întrerupe e.s., dacă $i2 = 0$ |

al cărui număr de identificare este dependent de varianta de implementare, furnizează la ieșire indicele momentului de calcul curent al experimentului de simulare. *Blocul nul* are numărul de identificare 0 (zero) și valoare de ieșire constantă, nulă.

*Descrierea m.s.r.* SS2D se realizează prin declarații introduse de la consolă, în regim conversațional. În cazul în care mai multe declarații se referă la același bloc (la același număr de identificare) simulatorul păstrează *ultima declarație corectă*. La cererea utilizatorului, declarațiile de descriere a m.s.r. pot fi preluate și din fișiere pe disc, denumite *fișiere model*, create într-o etapă de prelucrare anterioară. Declarațiile preluate din fișiere model pot fi șterse sau înlocuite prin declarații introduse de la consolă. Aceste facilități contribuie la creșterea eficienței utilizării simulatorului.



Scanned with OKEN Scanner

Descrierea completă a unui experiment de simulare **SS2D** include, în afara descrierii m.s.r. asupra căruia se efectuează experimentul, *descrierea condițiilor de desfășurare* a acestuia :

**a.** Dimensiunile secvențelor 2D ale căror proiecții sînt prelucrate pe parcursul execuției e.s. ; în funcție de acestea, se determină durata experimentului de simulare.

**b.** Modul în care se furnizează rezultatele e.s. Utilizatorul poate opta pentru un *fișier de rezultate* cu suport consolă, imprimantă sau disc. În fișierul de rezultate se înregistrează pe parcursul execuției e.s. valorile de ieșire ale blocurilor de interes din m.s.r. specificate de către utilizator. **SS2D** asigură reprezentarea *grafică* a unei singure ieșiri și reprezentarea *tabelară* a unui număr limitat de ieșiri de interes, conform tabelului 5.2.

Specificarea unui fișier de rezultate este obligatorie numai dacă m.s.r. nu conține blocuri de scriere în fișier.

**c.** Identificatorii fișierelor de intrare și de ieșire prelucrate pe parcursul execuției e.s. prin intermediul blocurilor de citire și respectiv scriere din configurația m.s.r.

La sfîrșitul execuției e.s. curent utilizatorul poate opta pentru continuarea sau încheierea sesiunii de lucru cu simulatorul. Sesiunea de lucru poate continua fie cu actualizarea descrierii e.s. curent, în scopul obținerii unei variante a acestuia, fie cu etapa de inițializare, urmată de specificarea unui experiment de simulare independent de cel curent.

*Tabelul 5.2*

| Suport fișier rezultate | Număr ieșiri de interes reprezentate | | |
|---|---|---|---|
| | tabelar | grafic + tabelar | |
| consolă | ⩽ 5 | 1 | 0 |
| imprimantă, disc | ⩽ 9 | 1 | ⩽ 4 |

Modul de desfășurare a unei sesiuni de lucru cu simulatorul **SS2D** este prezentat în figura 5.2. Figura 5.3 prezintă sistemul de fișiere utilizat de **SS2D**.

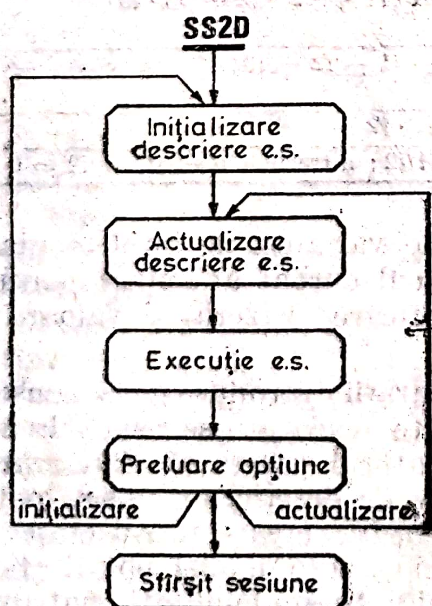



**Fig. 5.2.**

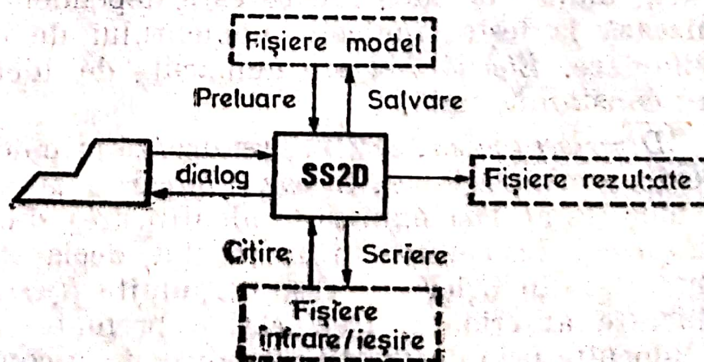



**Fig. 5.3.**

### 5.2.2. Etapele descrierii modelelor de simulare SS2D

Descrierea unui m.s.r. **SS2D** se obţine prin actualizarea m.s.r. iniţial vid sau a m.s.r. asupra căruia s-a executat e.s. anterior.

Etapele actualizării unui m.s.r. **SS2D**, prezentate şi în figura 5.4, sînt următoarele:

**A.** *Actualizarea configuraţiei* m.s.r. Aceasta se realizează printr-o *succesiune de declaraţii de configuraţie*, care se introduc de la consolă, ca răspuns la mesajul BLOC, TIP, INTRARI =

Declaraţiile de configuraţie au forma generală

$$n, t, i1, i2, i3$$

unde $n$ este numărul de identificare al blocului la care se referă declaraţia $n \in [1, max]$, $max$ — numărul maxim de blocuri admise în configuraţia m.s.r. de varianta de implementare utilizată, $t$ — tipul blocului, $i1$, $i2$, $i3$ — identificatorii blocurilor ale căror ieşiri sînt conectate la intrările blocului $n$; în funcţie de tipul asociat blocului, lista identificatorilor intrărilor conţine 0—3 elemente.

Pentru a elimina blocul $n$ din configuraţia m.s.r. se utilizează declaraţia

$$n$$

Simulatorul informează utilizatorul asupra rezultatului analizei fiecărei declaraţii introduse prin afişarea ecoului declaraţiilor corecte sau a mesajelor de eroare corespunzătoare în cazul declaraţiilor incorecte.

Prelucrările din această etapă a actualizării descrierii m.s.r. se desfăşoară conform următorului algoritm:

```
          algoritm actualizare-configuraţie este
atribuie sfîrşit—etapă ← fals;
repetă * afişează mesajul 'BLOC, TIP, INTRARI = ';
|       * preia răspuns;
|       alege răspuns dintre
|       | '?' : * afişează descrierea modelului; ;
|       | '!' : * salvează modelul; ;
|       | vid : atribuie sfîrşit-etapă ← adevărat ; ;
|       | '&' : * preia identificatorul fişierului model;
|       |       * preia declaraţiile din fişierul model;
|       |       /* Declaraţiile din fişierele model conţin informaţii complete despre
|       |          blocuri — număr de identificare, tip, intrări, valori parametri. */
|       |     ;
|       | rest * analizează declaraţia introdusă de la consolă;
|       | |    dacă eroare
|       | |    |     atunci * afişează mesajul de eroare corespunzător;
|       | |    |     altfel * afişează ecoul declaraţiei;
|       | |    |            dacă bloc-redefinit sau şters
|       | |    |            | atunci * afişează mesajul
|       | |    |            |            'DECLARATIA ANTERIOARA STEARSA;
|       | |    |            ;
|       | |    ;
|       | ;
|     ;
pînă cînd sfîrşit-etapă;
          sfîrşit
```

*Exemplu*: Pentru descrierea configurației modelului a cărui schemă bloc este prezentată în figura 5.5 sînt necesare declarațiile:

10, U, 10

20, U, 30

30, +, 10, 20

**B.** ***Verificarea configurației.*** În această etapă se verifică dacă descrierea configurației m.s.r. satisface următoarele condiții de consistență:

— sînt definite toate blocurile ai căror identificatori apar cu rol de intrări în declarațiile de configurație acceptate de către simulator (reamintim că blocurile nul și generator de tact sînt predefinite);

— este posibilă ordonarea (sortarea) declarațiilor de configurație astfel încît să fie posibilă evaluarea secvențială a funcțiilor asociate tuturor blocurilor instantanee din model, deci astfel încît în momentul evaluării funcției asociate unui bloc instantaneu să fie cunoscute valorile tuturor intrărilor sale.

În cazul în care m.s.r. nu este consistent, după semnalarea erorilor detectate se revine automat în etapa **A.**

**C.** ***Actualizarea valorilor parametrilor.*** Valorile parametrilor blocurilor din configurația m.s.r. se actualizează prin declarații introduse de la consolă ca răspuns la mesajul
BLOC, P1, P2, P3 =

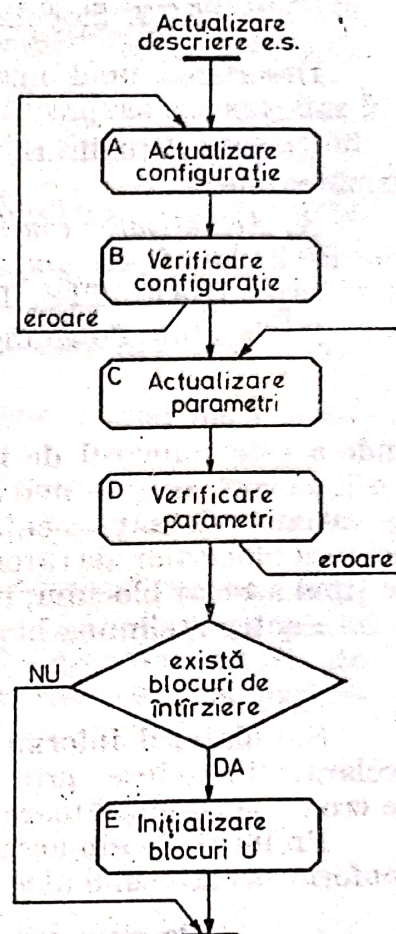



Fig. 5.4.

Declarațiile de parametri au structura generală

*n*, *p*1, *p*2, *p*3,

unde *n* este numărul blocului ai cărui parametri se actualizează cu valorile *p*1, *p*2, *p*3; parametrilor ale căror valori nu sînt declarate li se atribuie implicit valoarea 0 (zero).

*Exemplu*: Declarațiile de parametri necesare în cazul modelului din figura 5.5 sînt următoarele

10,6

20,5

(blocurile de tip + nu au parametri, de aceea nu este necesară o declarație de parametri cu privire la blocul 30).

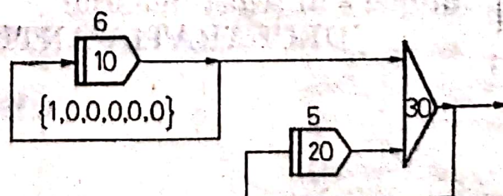



Fig. 5.5.

Algoritmul de actualizare a valorilor parametrilor este următorul:

```
                algoritm actualizare-parametri este
atribuie sfîrşit-etapă ← fals;
repetă * afişează mesajul 'BLOC, P1, P2, P3 = ';
      * preia răspuns;
      alege răspuns dintre
         '?' : * afişează descrierea modelului;;
         ';' : * salvează modelul;;
         vid : atribuie sfîrşit—etapă ← adevărat ; ;
         rest * analizează declaraţia;
              dacă eroare
                   atunci * afişează mesajul de eroare corespunzător;
                   altfel * afişează ecoul declaraţiei;
                          * actualizeazeă valorile parametrilor;
              ;
         ;
      ;
pînă cînd sfîrşit-etapă;
          sfîrşit
```

**D.** *Verificarea parametrilor.* Verificarea parametrilor se realizează în două faze:

**a.** Se verifică dacă parametrii tuturor blocurilor sînt corect specificaţi — de exemplu, parametrii blocurilor de tip **T** (generator de impulsuri) trebuie să îndeplinească condiţia

$$p1 \neq 0 \wedge p2 \geqslant 1,$$

iar parametrii blocurilor de tip **D** şi **L** trebuie să respecte condiţia

$$p1 > p2.$$

În cazul blocurilor de tip **U**, dacă $p1 < 1$, atunci acestui parametru i se atribuie automat valoarea 1, fapt care este semnalat printr-un mesaj de informare explicit.

**b.** Se determină ordinul m.s.r. şi se verifică dacă se încadrează în limitele admise de respectiva variantă de implementare a simulatorului.

Toate erorile detectate sînt semnalate prin afişarea unor mesaje corespunzătoare, după care se revine în etapa **C.**

Dacă nu s-au detectat erori se trece la următoarea etapă de prelucrare.

**E.** *Iniţializarea blocurilor de întîrziere.* Prin această etapă se trece numai dacă în configuraţia m.s.r. există blocuri de întîrziere. ***Valorile condiţiilor iniţiale*** trebuie declarate explicit *numai dacă sînt nenule*. În astfel de cazuri, ca răspuns la mesajul
BLOC =
se introduce numărul $n$ al blocului de întîrziere ce trebuie iniţializat. Valorile condiţiilor iniţiale $\{c_k,\ k = 0, \ldots, p1-1\}$ se introduc ca răspuns la mesajul

BLOC $n$, $p1$ VALORI INITIALE (CITE 5 PE LINIE)



Scanned with OKEN Scanner

Se observă că simulatorul precizează numărul blocului inițializat, numărul de valori inițiale ce trebuie specificate și modul de introducere a acestora.

*Exemplu.* Inițializarea blocului de întîrziere 10 din configurația modelului a cărui schemă-bloc este prezentată în fig. 5.5 necesită introducerea următoarelor declarații :

— declarația de specificare a numărului blocului inițializat

10

— declarația de specificare a celor 6 valori inițiale

1, 0, 0, 0, 0,

0

Prelucrările din această etapă se desfășoară conform algoritmului prezentat în cele ce urmează :

```
                algoritm inițializare-U este
atribuie sfîrșit-etapă ← fals;
repetă * afișează mesajul 'BLOC=';
|      * preia răspuns;
|      alege răspuns dintre
|      | '?' : * afișează descrierea modelului; ;
|      | '!' : * salvează descrierea modelului; ;
|      | vid : atribuie sfîrșit-etapă ← adevărat; ;
|      | rest * analizează numărul blocului;
|      |   | dacă eroare
|      |   |   | atunci * afișează mesajul de eroare corespunzător;
|      |   |   | altfel * preia valorile inițiale;
|      |   |   |        * afișează ecoul declarației;
|      |   |   ;
|      |   ;
|      ;
pînă cînd sfîrșit-etapă;
                sfîrșit
```

### 5.2.3. Afișarea r(salvarea) descrierii m.s.r. SS2D

Simulatorul SS2D permite ca în orice moment al sesiunii de lucru să se opteze, prin introducerea caracterului ? sau ! pentru afișarea, respectiv salvarea pe suport extern a descrierii m.s.r. curent.

Descrierea m.s.r. are aceeași structură, indiferent de tipul suportului pe care este înregistrată — consolă, imprimantă sau disc. În cazul general aceasta are două părți :

a. Descrierea blocurilor din m.s.r., care începe cu linia-antet

**BLOC TIP INTRARI PARAMETRI**

și continuă cu linii de descriere a blocurilor din configurația m.s.r. O astfel de linie are structura

*n t i1 i2 i3 p1 p2 p3*

deci precizează numărul blocului, tipul, intrările și valorile parametrilor săi.



Scanned with OKEN Scanner

b. Lista blocurilor de întîrziere cu valori iniţiale nenule. Această parte lipseşte din descrierea m.s.r. în cazul în care toate blocurile de întîrziere au condiţii iniţiale nule. În caz contrar, după linia-antet

INITIALIZARI BLOCURI DE INTIRZIERE

se înregistrează, pentru fiecare bloc de întîrziere cu condiţii iniţiale nenule, numărul blocului respectiv şi valorile condiţiilor iniţiale (acestea din urmă se înregistrează cîte 5 pe linie).

*Exemplu*. Descrierea modelului din figura 5.5 se afişează/salvează pe suport extern astfel:

```
BLOC TIP  I N T R A R I     P A R A M E T R I
 10   U    10    0    0    .600000E+01
 20   U    30    0    0    .500000E+01
 30   +    10   20    0
   INITIALIZARI BLOCURI DE INTIRZIERE
 10   :
       .100000E+01    .000000E+01    .000000E+01    .000000E+01    .000000E+01
       .000000E+01
```

Se observă că valorile parametrilor sînt reprezentate în forma

$$\underbrace{s^v c\ldots c}_{\text{mantisă}}\underbrace{E\,s^e cc}_{\text{exponent}}$$

unde $c$ reprezintă o cifră,

$s^v$ — semnul valorii, care apare numai în cazul valorilor negative

$s^e$ — semnul exponentului

Valoarea astfel reprezentată este

$$v = (\text{valoare mantisă})\cdot 10^{\text{valoare exponent}}$$

### 5.2.4. Structura fişierelor de rezultate SS2D

După cum s-a arătat în secţiunea 5.2.1, simulatorul **SS2D** poate înregistra într-un *fişier de rezultate* cu suport consolă, imprimantă sau disc, reprezentarea *grafică şi tabelară* a unei ieşiri de interes şi (sau) reprezentarea *tabelară* a unui număr limitat de ieşiri de interes (v. tabelul 5.2).

În cazul cel mai general un fişier de rezultate SS2D conţine următoarele tipuri de înregistrări:

**a.** Înregistrarea antet a fişierelor de rezultate pe disc

*-*-*-* FISIER REZULTATE S S 2 D *-*-*-*

**b.** Înregistrarea ce precizează dimensiunile secvenţelor 2D ale căror proiecţii au fost prelucrate pe parcursul execuţiei e.s.

NUMAR LINII, COLOANE = *nl*, *nc*

**c.** Descrierea conţinutului fişierului de rezultate

TACT *vmin* *vmax* IESIRE (*ng*) IESIRE ($n^1$) . . . .

sau

TACT IESIRE ($n^1$) . . . .

unde *vmin*, *vmax* precizează limitele între care se încadrează reprezentarea grafică a ieşirii blocului *ng*, $\{n^i, i = 1, \ldots\}$ — numerele blocurilor ale căror ieşiri se reprezintă tabelar



Scanned with OKEN Scanner

**d.** Înregistrări de rezultate cu structura

$k$ I----+ I $eg_k$ $e_k^1$ . . .

sau

$k$ $e_k^1$ . . . .

unde $k$ este indicele momentului de calcul (denumit și tact) la care la ieșirile blocurilor $ng$, respectiv $\{n^i,\ i = 1, \ldots\}$ s-au obținut valorile $eg_k$ și, respectiv, $\{e_k^i,\ i = 1, \ldots, \}$; caracterul + marchează pe grafic punctul corespunzător valorii $eg_k$; caracterele I delimitează reprezentarea grafică; dacă valoarea $eg_k \notin [vmin, vmax]$ atunci caracterul + înlocuiește caracterul I din extrema stîngă (pentru $eg_k < vmin$) sau din extrema dreaptă (pentru $eg_k > vmax$).

**e.** Înregistrarea care marchează sfîrșitul anormal al experimentului de simulare

** INTRERUPERE BLOC $n - t$

unde $n$, $t$ reprezintă numărul și tipul blocului care a determinat întreruperea e.s. înainte de parcurgerea întregului interval de observare.

În figura 5.6 este prezentat un exemplu de fișier de rezultate **SS2D**, cu suport imprimantă.

Specificarea informațiilor cu privire la suportul și conținutul fișierului de rezultate se realizează conform algoritmului prezentat în cele ce urmează.

```
            algoritm specificare-fişier-rezultate  este
atribuie modificare ← adevărat;
cît timp modificare repetă
|    * afişează informaţii despre suportul fişierului de rezultate curent;
|    * preia opţiune modificare;
|    dacă modificare
|    |    atunci * afişează mesajul
|    |    'REZULTATE LA[1=CONSOLA/2=IMPRIMANTA/3=DISC]=';
|    |    * preia opţiune şi actualizează informaţiile despre fişierul de rezul-
|    |    tate;
|    |    dacă opţiune = 3
|    |    |         atunci * preia identificatorul fişierului şi deschide fişierul;
|    |    ;
|    ;
|    atribuie sfîrşit-etapă ← fals;
|    repetă
|    |    * afişează mesajul 'GRAFIC : BLOC, VMIN, VMAX= ';
|    |    dacă există specificare grafic
|    |    | atunci * afişează numărul blocului şi limitele de reprezentare grafică;
|    |    ;
|    |    * preia răspuns;
|    |    alege răspuns dintre
|    |    |    '?', '!' : * afişare sau salvare descriere model; ;
|    |    |    vid : atribuie sfîrşit-etapă ← adevărat; ;
|    |    |    rest * analizează răspuns şi actualizează specificarea conţinutului
|    |    |         fişierului de rezultate ; ;
|    |    ;
|
|    pînă cînd sfîrşit-etapă;
```

```
NUMAR LINII,COLOANE =   3,  4

   TACT   .10000E+01                                          .46000E+01  IESIRE ( 8)  IESIRE ( 1)  IESIRE ( 5)
     0.   +                                                   I  .10000E+01   .10000E+01   .00000E+01
     1.   +                                                   I  .00000E+01   .00000E+01   .00000E+01
     2.   +                                                   I  .00000E+01   .00000E+01   .00000E+01
     3.   I----------------------+                            I  .21000E+01   .16000E+01   .50000E+00
     4.   +                                                   I  .10000E+01   .10000E+01   .00000E+01
     5.   +                                                   I  .00000E+01   .00000E+01   .00000E+01
     6.   I------------------------------------------+        I  .40000E+01   .30000E+01   .10000E+01
     7.   I---------------+                                   I  .15000E+01   .10000E+01   .00000E+01
     8.   +                                                   I  .10000E+01   .10000E+01   .00000E+01
     9.   I--------------------------+                        I  .25000E+01   .10000E+01   .15000E+01
    10.   I-------------------------------------------------+    .46000E+01   .36000E+01   .00000E+01
    11.   I----------------------+                            I  .21000E+01   .16000E+01   .00000E+01
    12.   I---------------------+                             I  .20000E+01   .00000E+01   .20000E+01
    13.   I---------------------+                             I  .20000E+01   .50000E+00   .00000E+01
    14.   I-------------------------------------------------+    .46000E+01   .36000E+01   .00000E+01
    15.   I--------------------------------+                  I  .30000E+01   .00000E+01   .25000E+01
    16.   I---------------------+                             I  .20000E+01   .00000E+01   .00000E+01
    17.   I---------------+                                   I  .15000E+01   .00000E+01   .00000E+01
```

Fig. 5.6.

```
     atribuie sfîrşit-etapă ← fals;
     repetă
        * afişează mesajul 'IESIRI TABELARE (MAXIM mt) = ';
        dacă există specificare ieşiri tabelate
        !    atunci * afişează lista ieşirilor tabelate;
        ;
        * preia răspuns;
        alege răspuns dintre
           '?',   '!' : * afişare sau salvare descriere model; ;
           vid : atribuie sfîrşit-etapă ← adevărat; ;
           rest * analizează răspuns şi actualizează lista ieşirilor tabelate;
           |
           ;
        ;
     pînă cînd sfîrşit-etapă;
     * preia opţiune modificare;
;
        sfîrşit
```

### 5.2.5. Interpretarea reprezentărilor grafice din fişierele de rezultate SS2D

La prima vedere s-ar părea că reprezentările grafice de tipul „evoluţie în timp" furnizate de simulatorul **SS2D** nu oferă informaţii semnificative pentru analiza asistată de calculator a sistemelor 2D. La o analiză mai atentă se poate însă constata că prin prelucrarea acestor reprezentări se obţin imagini în spaţiu ale secvenţelor 2D, denumite în cele ce urmează *reprezentări spaţiale* **SS2D**.

Fie $\{u_{m,n}\}$ o secvenţă 2D de dimensiuni $M = 2$ şi $N = 3$, cu structura

$$\begin{cases} u_{0,0} = 1 & u_{0,1} = 2.5 & u_{0,2} = 1.2 \\ u_{1,0} = 0.5 & u_{1,1} = 1.5 & u_{1,2} = 0.2 \end{cases} \tag{5.1}$$



Scanned with OKEN Scanner

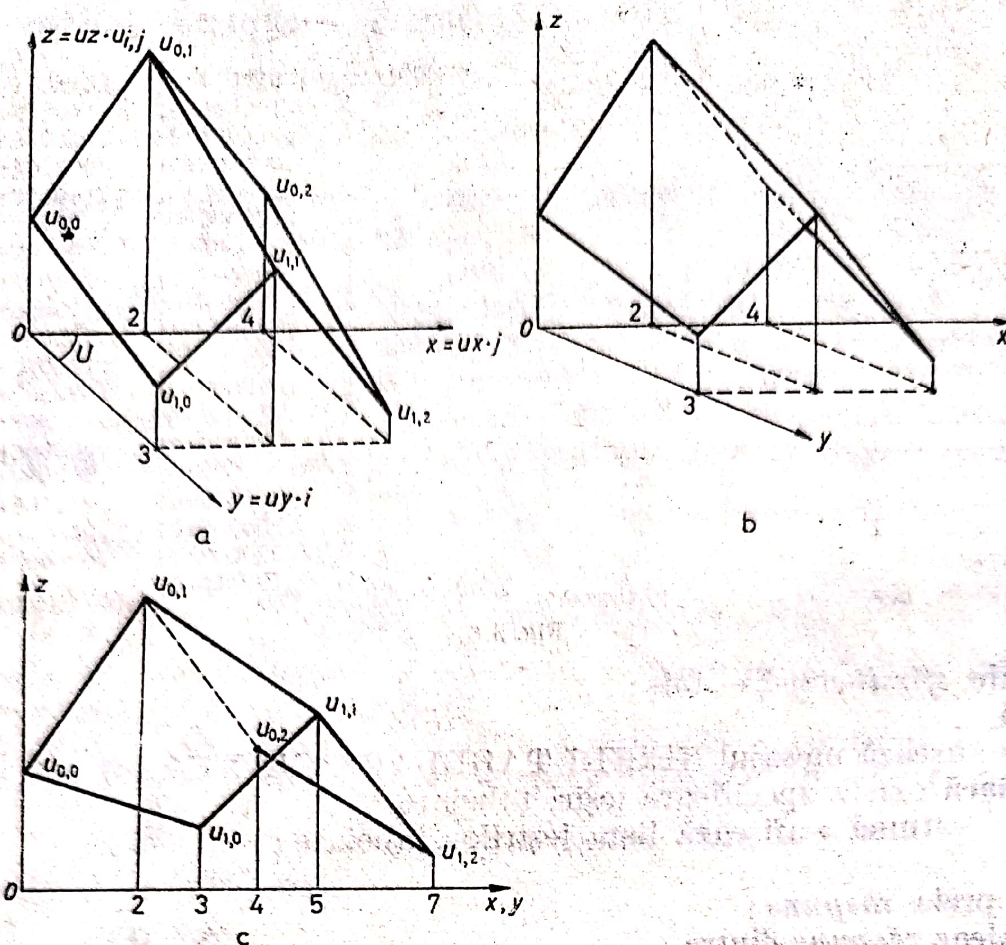



Fig. 5.7.

Proiecția standard a acestei secvențe 2D este

$$\{u_k\} = \{1,\ 0,\ 2.5,\ 0.5,\ 1.2,\ 1.5,\ 0,\ 0.2\} \tag{5.2}$$

Figura 5.7a oferă o reprezentare în spațiu a secvenței 2D $\{u_{m,n}\}$, unde unitățile de măsură pe axele sistemului de coordonate utilizat sînt

$$ux = M = 2,$$

$$uy = N = 3,$$

$$uz = 1.$$

Se observă că prin enumerarea elementelor secvenței 2D (5.1), de la stînga spre dreapta, în ordinea în care sînt întîlnite în figura 5.7a, se obține o secvență în care acestea apar în aceeași ordine ca și în proiecția standard (5.2) a secvenței 2D considerate.

Prin micșorarea unghiului $U$ dintre axele $Ox$ și $Oy$, se obține reprezentarea grafică din figura 5.7b, care, deși deformată, își păstrează sugestivitatea. În cazul în care unghiul dintre axele $Ox$ și $Oy$ devine nul, se obține reprezentarea din figura 5.7 c.

Dacă se reprezintă grafic secvența 2D(5.1) în sistemul de coordonate din figura 5.8a, unde unghiul dintre axele $Ox$ și $Oy$ are valoare pozitivă, iar



Scanned with OKEN Scanner

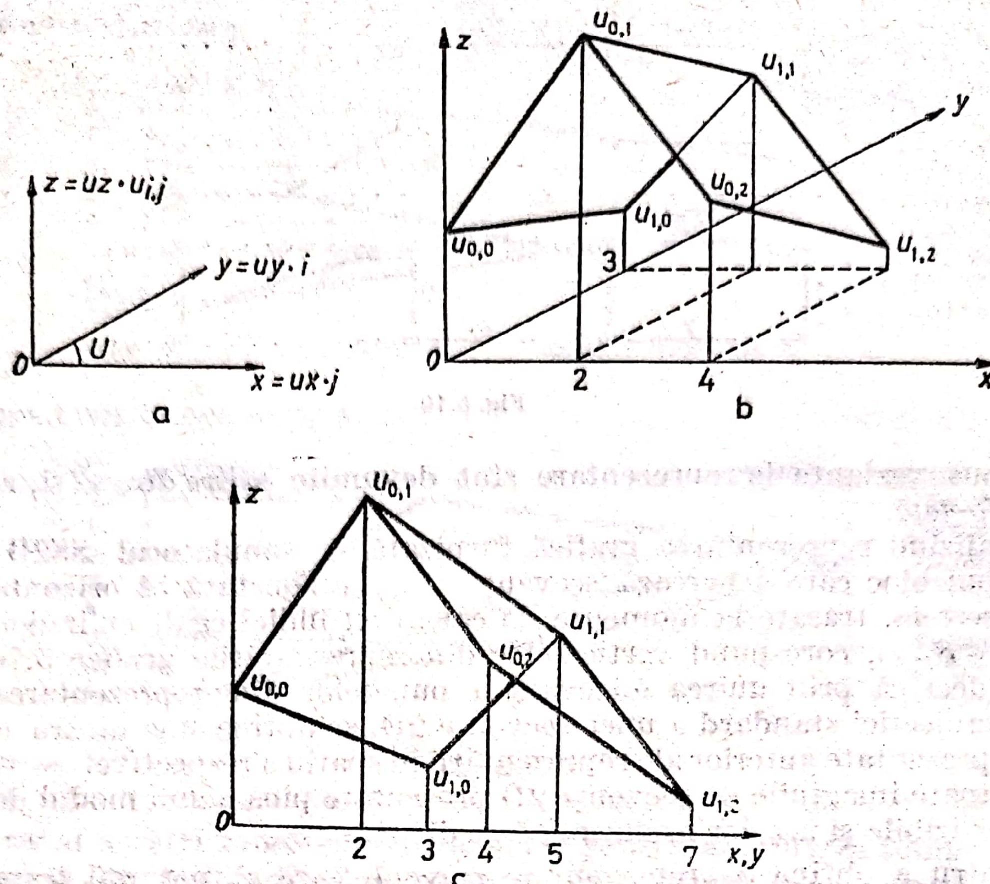



Fig. 5.8.

unităţile de măsură pe axe sînt cele din cazul anterior, se obţine imaginea din figura 5.8b. În acest caz, prin anularea unghiului $U$ se obţine reprezentarea din figura 5.8c, în care, la fel ca şi în cea din figura 5.7c, punctele corespunzătoare elementelor din secvenţa 2D apar în aceeaşi ordine ca şi în proiecţia standard a acesteia.

Principala diferenţă dintre cele două reprezentări constă în aceea că oferă puncte de vedere diferite asupra secvenţei 2D reprezentate grafic. Astfel, reprezentarea din figura 5.7 a, oferă imaginea proiectată pe planul $xOz$ a secvenţei 2D privită ca în figura 5.9a, deci pune în prim-plan punctele corespunzătoare elementelor din *prima coloană şi ultima linie* a secvenţei 2D. În figura 5.8c punctul de vedere asupra elementelor secvenţei 2D este cel din figura 5.9b, care pune în prim-plan punctele corespunzătoare elementelor din *prima linie şi ultima coloană* a secvenţei 2D. Să observăm că reprezentarea din figura 5.8c, poate fi interpretată ca imaginea *reflectată* de planul $xOz$ a reprezentării grafice din figura 5.7c sau, echivalent, ca reprezentarea grafică a transpusei secvenţei 2D considerate. În cele ce urmează

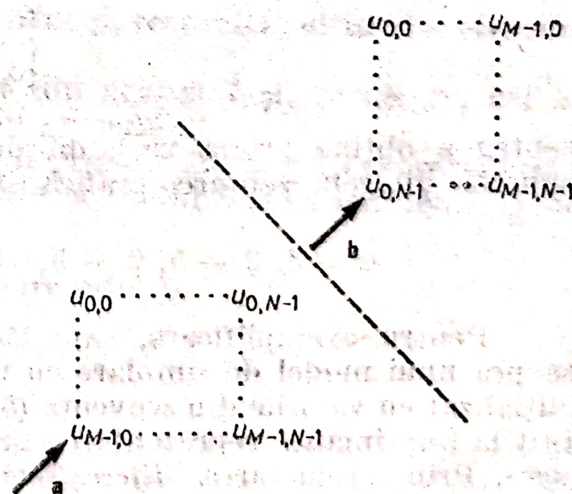



Fig. 5.9.



Scanned with OKEN Scanner

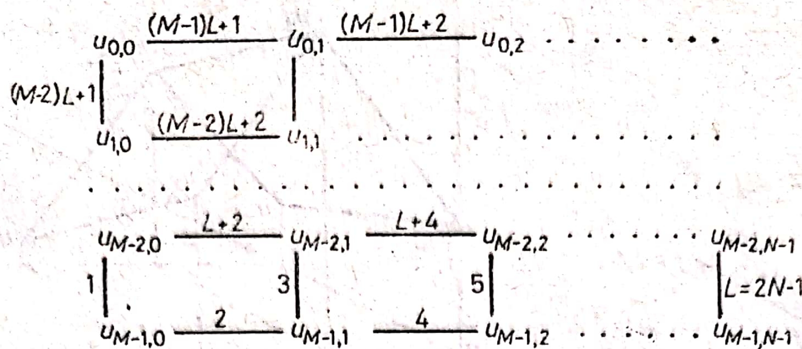



Fig. 5.10.

aceste două variante de reprezentare sînt denumite ***vedere directă*** şi, respectiv, ***vedere reflectată***.

Analizînd reprezentarea grafică furnizată de simulatorul **SS2D** pentru ieşirea unui bloc care generează secvenţa $\{u_k\}$, se constată că orizontalele din cadrul acesteia, trasate la momente de calcul cu indici egali cu indici semnificativi ($k \in S_{M,N}$), corespund verticalelor din reprezentările grafice 5.7c şi 5.8c. Rezultă deci că prin unirea adecvată a punctelor din reprezentarea grafică **SS2D** a proiecţiei standard a unei secvenţe 2D, se obţine una dintre cele două variante prezentate anterior ale reprezentării în spaţiu a respectivei secvenţe 2D.

În toate imaginile de secvenţe 2D prezentate pînă acum modul de trasare a liniilor vizibile şi a celor ascunse a fost diferit.

Pentru a obţine o reprezentare corectă, care să permită ***trasarea distinctă sau eliminarea liniilor ascunse***, unirea punctelor corespunzătoare valorilor elementelor din secvenţele 2D trebuie să se realizeze, în funcţie de tipul imaginii dorite, fie în ordinea indicată în figura 5.10, fie în ordine inversă. Figura 5.10 se referă însă la secvenţa 2D, în timp ce reprezentările spaţiale **SS2D** se obţin prin prelucrarea reprezentării grafice **SS2D** a proiecţiei standard a secvenţei 2D, în care reprezentarea punctului corespunzător unei valori $u_{i,j}$ apare la momentul $k = iN + jM$. Rezultă deci că pentru realizarea reprezentărilor spaţiale **SS2D** trebuie determinate poziţiile pe care le ocupă elementele secvenţelor 2D în proiecţiile standard. Astfel, în cazul secvenţei 2D (5.1), pentru care indicii semnificativi din proiecţia standard sînt:

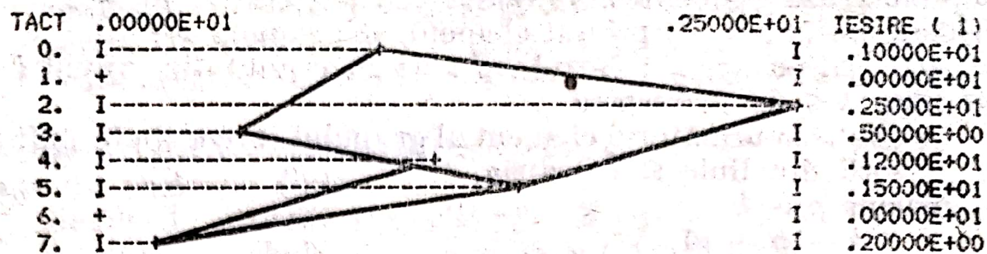
$$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}, \tag{5.3}$$

pentru a obţine prima variantă de reprezentare spaţială (vedere directă) punctele din reprezentarea grafică **SS2D** trebuie unite în ordinea

$$0-3,\ 3-5,\ 2-5,\quad 5-7,\quad 4-7,\ 0-2,\ 2-4.$$

Pentru exemplificare, s-au făcut două experimente **SS2D** consecutive asupra unui model de simulare cu un singur bloc de întîrziere, de ordinul 8, iniţializat cu valorile din secvenţa (5.2). Pe parcursul celor două e.s. s-a înregistrat la imprimantă reprezentarea grafică şi tabelară a ieşirii blocului de întîrziere. Prin prelucrarea *diferenţiată* a reprezentărilor grafice **SS2D** ***identice***, obţinute ca rezultat al e.s. efectuate, s-ai realizat cele două variante de reprezentare spaţială **SS2D** din figura 5.11.

NUMAR LINII,COLOANE = 2, 3




NUMAR LINII,COLOANE = 2, 3

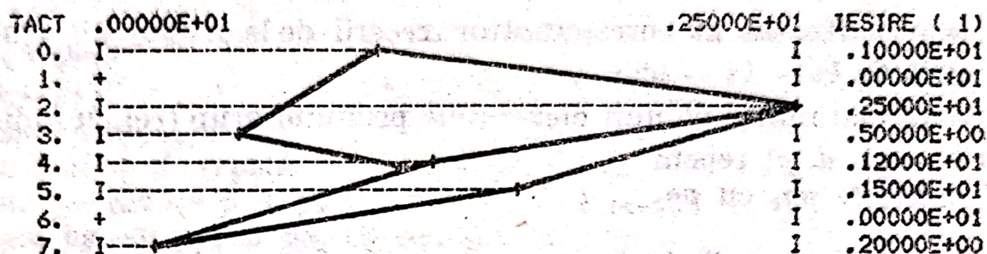



**Fig. 5.11.**

În cazul acestei reprezentări s-a optat pentru eliminarea liniilor ascunse.

În cele ce urmează este prezentat algoritmul care asigură, în cazul general, obținerea corectă a variantelor de reprezentare spațială **SS2D**. Acest algoritm se bazează pe faptul că cele două variante prelucrează punctele corespunzătoare valorilor elementelor secvenței 2D pe grupuri care sînt linii în cazul vederii directe (care pune în prim-plan prima coloană și ultima linie) și respectiv coloane în cazul vederii reflectate (în care în prim-plan apar prima linie și ultima coloană). Valorile variabilelor utilizate în acest algoritm reprezintă indici sau diferențe între indicii elementelor din proiecția standard a unei secvențe 2D:

- $p1$, $p2$ — diferența dintre indicii elementelor adiacente din același grup și, respectiv, din grupuri alăturate;
- $ki$ — indicele primului element al grupului $i$;
- $d$ — diferența dintre indicii primului și, respectiv, ultimului element dintr-un grup;
- $k$, $p$ — indicele elementului curent din grupul $i$ și, respectiv, cel al predecesorului său în cadrul grupului.

Notația $pg_k$ se referă la punctul marcat prin caracterul$^+$ în reprezentarea grafică din linia de rezultate **SS2D**, obținute la tactul $k$ al experimentului de simulare.

**algoritm** reprezentare **este**

**dacă** vedere directă
| **atunci atribuie** $p1 \leftarrow M$ & $p2 \leftarrow N$;
|   /* grupurile sînt linii */
| **altfel atribuie** $p1 \leftarrow N$ & $p2 \leftarrow M$;
|   /* grupurile sînt coloane */
;

**atribuie** $d \leftarrow p1(p2-1)$ & $ki \leftarrow (p1-1)p2$;

```
cît timp ki > 0 repetă
|    /* prelucrează elementele grupului i, i = p1 − 1, p1 − 2, ..., 1*/
|    atribuie k ← ki ;        /*primul element al grupului i*/
|    *uneşte pg_k cu pg_{k−p2} ; /* trebuie unit cu primul din grupul i − 1 */
|    cît timp k ⩽ ki + d repetă
|    |    /* avans la următorul element al grupului care trebuie unit cu predece-
|    |       sorii din linie şi coloană*/
|    |    atribuie p ← k
|    |    |    & k ← p + p1
|    |    ;
|    |    * uneşte pg_k cu pg_p ;
|    |    * uneşte pg_k cu pg_{k−p2} ;
|    ;
|     /* actualizează ki corespunzător trecerii de la grupul i la grupul i − 1 */
|     atribuie ki ← ki − p2 ;
|     /* au mai rămas de unit elementele primului grup (cel cu indice i = 0)*/
pentru k = p1, d, p1 repetă
|     * uneşte pg_k cu pg_{k−p1} ;
;
                          sfîrşit
```

Se constată că prelucrarea reprezentărilor grafice **SSD2** este laborioasă şi necesită un efort cu atît mai mare cu cît secvenţele 2D ale căror reprezentări spaţiale trebuie obţinute au dimensiuni mai mari.

Totuşi, în absenţa unui program care să ofere facilităţi de reprezentare în spaţiu a secvenţelor 2D (de tipul componentei **GRAF2D** a mediului interactiv de simulare **SIM2D**) reprezentările spaţiale **SS2D** se dovedesc foarte utile, deci se justifică efortul implicat de obţinerea lor.

Reprezentări spaţiale **SS2D** pot fi realizate şi prelucrînd proiecţiile verticale sau orizontale ale secvenţelor 2D. Reamintim că aceste tipuri de proiecţii se obţin prin simulare, dacă se utilizează un m.s.r. „*convertor de ieşire*” (vezi secţiunea 4.3.2), care realizează transformarea

$$\{u_k\} \to \{u_k^*\} = \{0\}^{NR}\, \mathfrak{Q}^{v/0}\, \{\mathfrak{B}^b\{u_k\}\},$$

unde $NR = (M-1)(N-1)$.

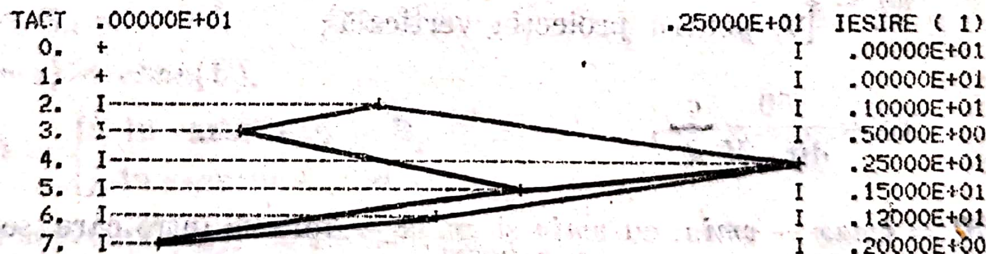
În aceste cazuri pentru reprezentările spaţiale **SS2D** se utilizează ultimele $M \cdot N$ linii din reprezentarea grafică **SS2D** a ieşirii m.s.r. convertor. Algoritmul de prelucrare a acestora este o variantă a celui prezentat anterior, de care se deosebeşte în principal prin modul de iniţializare a variabilelor ***p*1, *p*2, *d*** şi ***ki***. De altfel algoritmul poate fi rescris, astfel încît să fie aplicabil pentru toate cele trei tipuri de proiecţii. În noua variantă a algoritmului se notează cu $q$ indicele primului element al proiecţiei prelucrate :

```
                    algoritm reprezentare' este
dacă se prelucrează ieşirea unui model convertor
|    atunci atribuie q ← (M−1) (N−1);
|    altfel  atribuie q ← 0;
;
```

```
dacă vedere directă
|      atunci alege tip proiecţie dintre
|                  | standard : atribuie p1 ← M & p2 ← N ; ;
|                  | verticală : atribuie p1 ← M & p2 ← 1 ; ;
|                  | orizontală : atribuie p1 ← 1 & p2 ← N ; ;
|                  ;
|                  atribuie d ← p1(N−1) & ki ← Mp2(−1) + q ;
|      altfel alege tip proiecţie dintre
|                  | standard : atribuie p1 ← N & p2 ← M ; ;
|                  | verticală : atribuie p1 ← 1 & p2 ← M ; ;
|                  | orizontală : atribuie p1 ← N & p2 ← 1 ; ;
|                  ;
|                  atribuie d ← p1(M−1) & ki ← p2(N−1) + q ;
;
cît timp ki > q repetă
|    atribuie k ← ki ;
|    * uneşte pg_k cu pg_{k−p2} ;
|    cît timp k ≤ ki + d repetă
|    |    atribuie p ← &k k ← p + p1 ;
|    |    * uneşte pg_p cu pg_k şi pg_k cu pg_{k−p2} ;
|    ;
|    atribuie ki ← ki − p2 ;
;
pentru k = q + p1, d, p1 repetă
|    * uneşte pg_k cu pg_{k−p1} ;
;
                    sfîrşit
```

În figura 5.12 sînt prezentate imagini ale secvenţei 2D(5.1), construite prin prelucrarea proiecţiilor verticală şi orizontală ale acesteia.

NUMAR LINII, COLOANE = 2, 3




NUMAR LINII, COLOANE = 2, 3

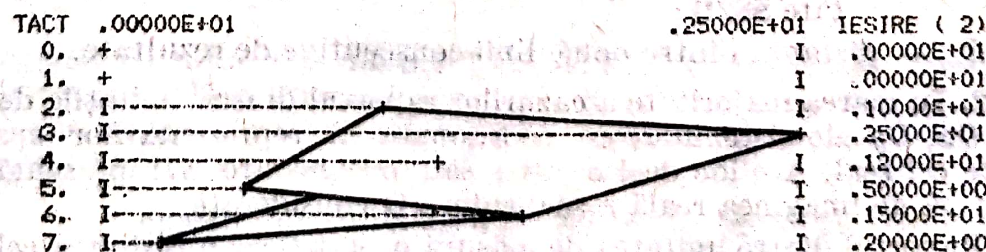



Fig. 5.12.

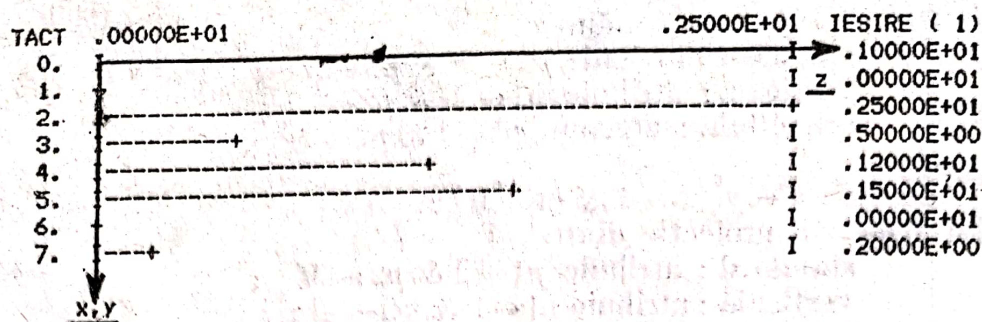



Fig. 5.13.

Cu privire la reprezentările spaţiale **SS2D** se mai pot observa următoarele:

**1.** Aceste reprezentări se realizează în sistemul de coordonate din figura 5.13, unde

$$x = ux \cdot j,$$

$$y = uy \cdot i,$$

$$z = uz \cdot u_{i,j}.$$

Valorile unităţilor de măsură pe axele acestui sistem de coordonate sînt determinate de tipul proiecţiei unidimensionale, prelucrate şi de caracteristicile reprezentării grafice **SS2D**, după cum urmează:

$$ux = \begin{cases} dM, \text{ pentru proiecţia standard şi verticală,} \\ d, \text{ pentru proiecţia orizontală;} \end{cases}$$

$$uy = \begin{cases} dN, \text{ pentru proiecţia standard şi orizontală,} \\ d, \text{ pentru proiecţia verticală;} \end{cases}$$

$$uz = \frac{50}{dif \cdot M} \frac{c}{d},$$

unde $dif = vmax - vmin$, cu $vmin$ şi $vmax$ — limitele între care se încadrează reprezentarea grafică **SS2D**;

$c$ — distanţa dintre două caractere consecutive dintr-o linie de rezultate **SS2D**;

$d$ — distanţa dintre două linii consecutive de rezultate.

**2.** În marea majoritate a cazurilor raportul dintre unităţile de măsură pe axele $Ox$, $Oy$ ale sistemului de coordonate al reprezentărilor spaţiale **SS2D** nu este cel real. Are loc deci o lăţire sau o îngustare a reprezentării spaţiale **SS2D** faţă de imaginea reală a secvenţei 2D considerate.

Raportul dintre unitatea de măsură pe axa $Oz$ şi una dintre celelalte două ($Ox$ sau $Oy$) poate fi păstrat prin alegerea adecvată a valorilor limitelor de încadrare a reprezentării grafice **SS2D** ($vmin$ şi $vmax$). De obicei se preferă păstrarea

raportului

$$r = \frac{uz}{ux}.$$

În cazul prelucrării proiecției standard sau verticale,

$$\frac{uz}{ux} = \frac{50}{dif \cdot M} \cdot \frac{c}{d},$$

de unde rezultă că

$$dif = \frac{50}{rM} \cdot \frac{c}{d}.$$

Dacă se fixează valoarea *vmin*, atunci se calculează

$$vmax = vmin + dif.$$

Alegerea limitelor de încadrare a reprezentării grafice **SS2D**, astfel încît să se păstreze raportul $r$, prezintă riscul obținerii unei reprezentări spațiale incomplete. De exemplu, în cazul reprezentării spațiale **SS2D** a secvenței (5.1), dacă se alege $vmin = 0$ și păstrarea raportului $r$ implică $dif = 1.5$, rezultă că trebuie ales $vmax = 1.5$. Prelucrînd reprezentarea grafică **SS2D** realizată cu aceste limite de încadrare, se obține imaginea din figura 5.14, care este o imagine incompletă a secvenței 2D considerate.

Figura 5.15 ilustrează efectul modificării valorilor *vmin*, *vmax* asupra reprezentării spațiale **SS2D** a secvenței (5.1).

**3.** Imaginile secvențelor 2D pot deveni mai sugestive dacă se realizează în unul dintre sistemele de coordonate din figura 5.16. O astfel de imagine poate fi obținută dacă se prelucrează reprezentarea grafică **SS2D** a proiecției standard, verticală sau orizontală a secvenței 2D $\{u'_{m,n}\}$ cu proprietatea

$$u'_{i,j} = u_{i,j} + \alpha \cdot ind, \qquad i = 0, \ldots, M-1, \qquad j = 0, \ldots, N-1,$$

unde $semn(\alpha) = semn(U)$,

$$ind = \begin{cases} i, \text{ în cazurile } \mathbf{A} \text{ și } \mathbf{B}, \\ j, \text{ în cazurile } \mathbf{C} \text{ și } \mathbf{D}, \end{cases}$$

Dar secvența $\{s_{m,n}\}$ cu elementele

$$s_{i,j} = \alpha \cdot ind, \qquad i = 0, \ldots, M-1, \qquad j = 0, \ldots, N-1$$

este o progresie cu rația $\alpha$ și durata 1 (vezi 4.2.2.1), verticală dacă $ind = i$ și, respectiv, orizontală pentru $ind = j$.

Proiecția standard a secvenței $\{u'_{m,n}\}$ se obține la ieșirea modelului de simulare prezentat în figura 5.17a, ale cărui componente principale sînt:

**M** — modelul de simulare care generează proiecția standard $\{u_k\}$ a secvenței 2D, a cărei imagine trebuie obținută;

**MS** — m.s.r. generator al proiecției standard $\{s_k\}$ a progresiei verticale sau orizontale.



Scanned with OKEN Scanner

NUMĂR LINII, COLOANE =  2, 3

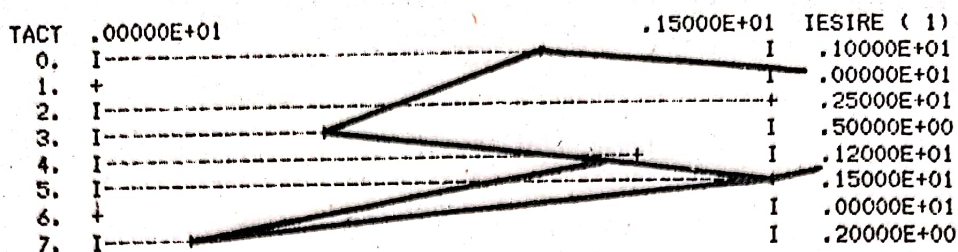
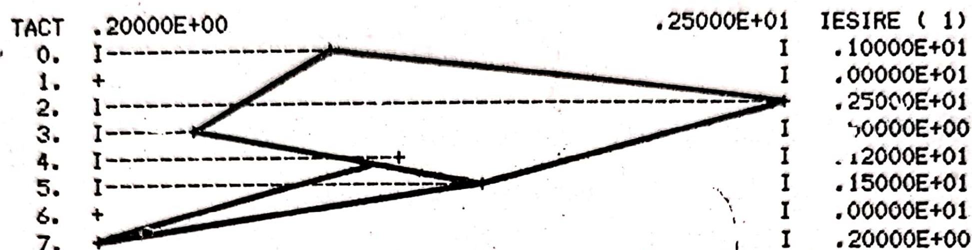
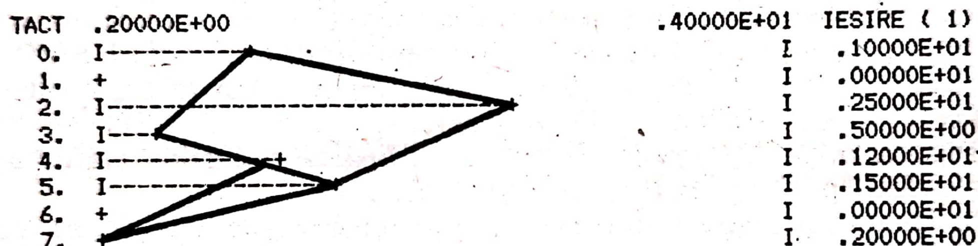



Fig. 5.14.

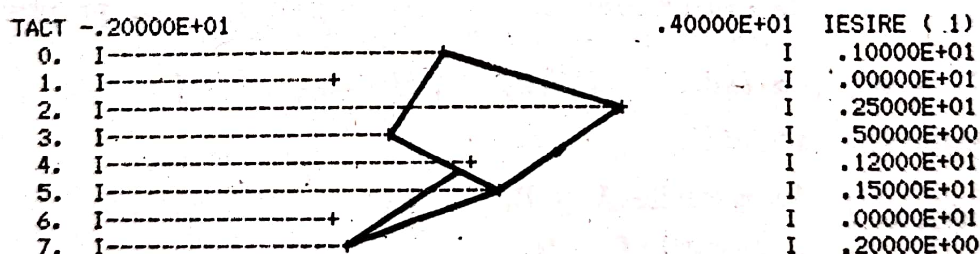
NUMAR LINII, COLOANE =  2, 3




NUMAR LINII, COLOANE =  2, 3




NUMAR LINII, COLOANE =  2, 3




NUMAR LINII, COLOANE =  2, 3

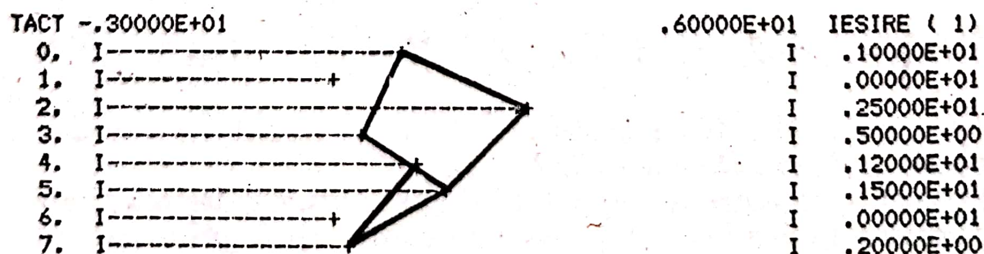



Fig. 5.15.

Modelul de simulare **MS** incorporează modelul **MI**, care generează secvența inițială $\{s_k^0\}$ (vezi 4.2.2.2., unde, în figura 4.12, sînt prezentate două variante de implementare a m.s.r. **MI**).

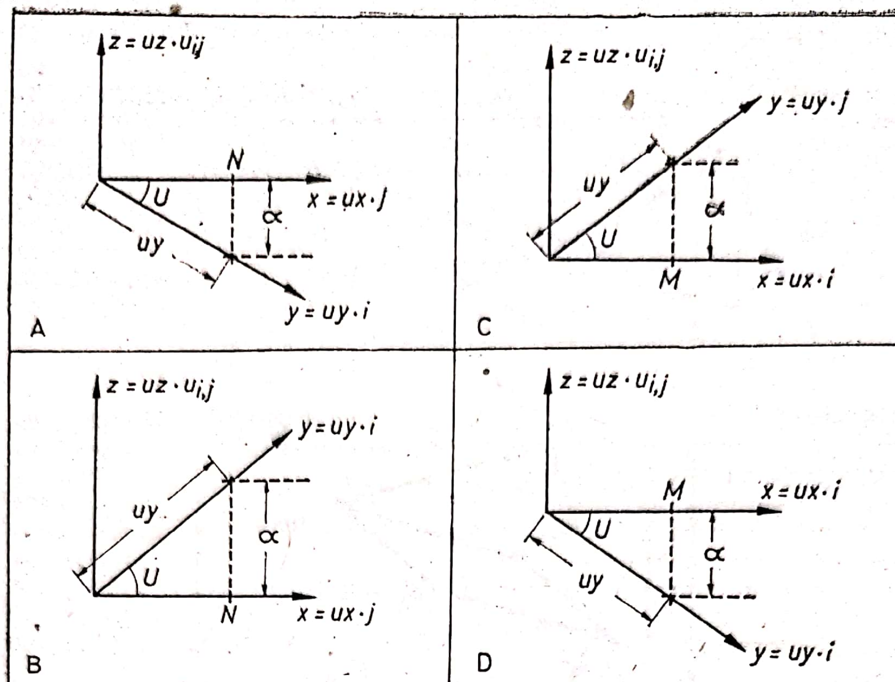


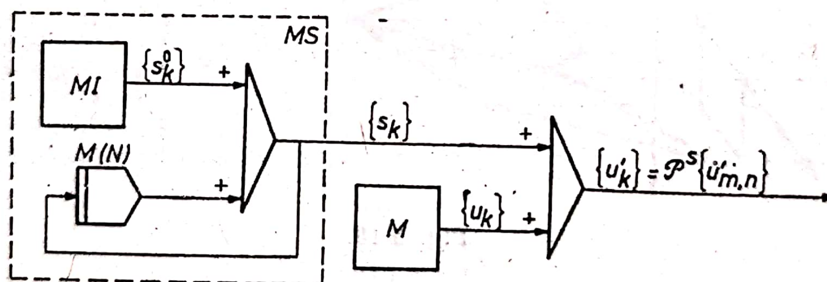

Fig. 5.16.

Proiecţia verticală sau orizontală a secvenţei $\{u'_{m,n}\}$ se obţine la ieşirea m.s.r., prezentat în figura 5.17 b, unde :

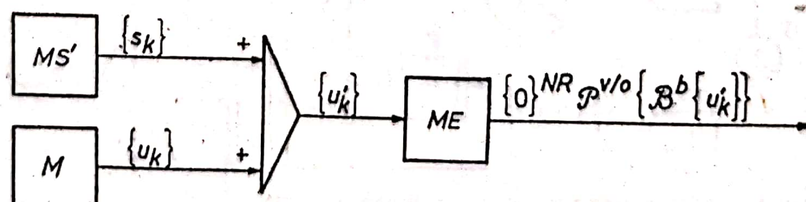
**MS** — model generator al proiecţiei standard a progresiei verticale (orizontale) de amplitudine α şi durată 1 ;

**ME** — m.s.r. convertor de ieşire (vezi 4.3.2.).

În figura 5.18 este prezentat un exemplu de reprezentare spaţială **SS2D** a secvenţei 2D (5.1) în cele patru sisteme de coordonate diferite din figura 5.16. Aceste reprezentări au fost obţinute prin prelucrarea rezultatelor a patru expe-



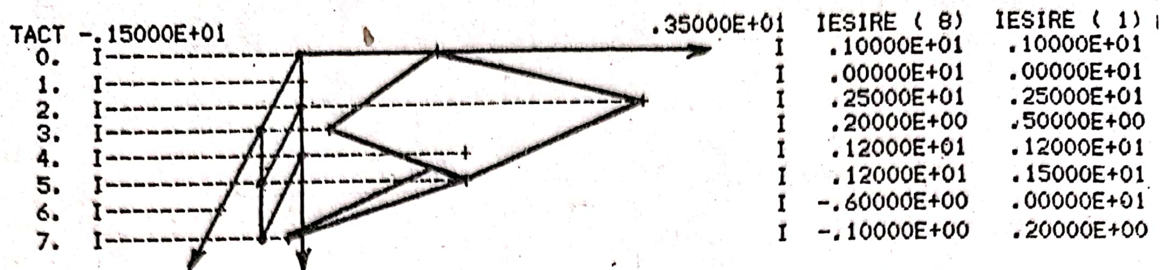

a




b

Fi . 5.17.

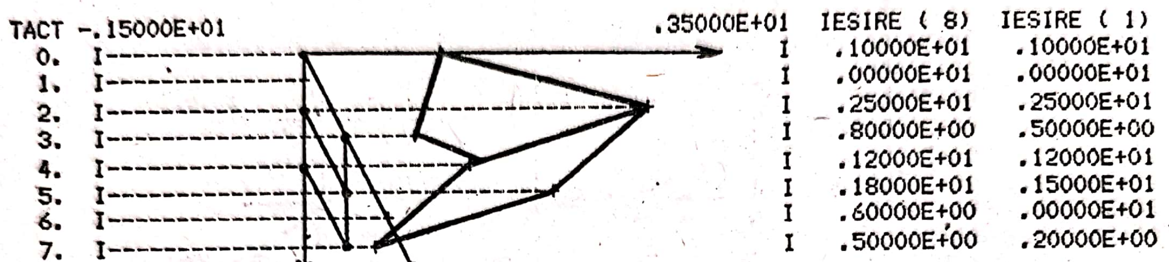
NUMAR LINII,COLOANE = 2, 3



TACT -.15000E+01 … .35000E+01

| TACT | IESIRE ( 8) | IESIRE ( 1) |
|---|---|---|
| 0. | .10000E+01 | .10000E+01 |
| 1. | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 2. | .25000E+01 | .25000E+01 |
| 3. | .20000E+00 | .50000E+00 |
| 4. | .12000E+01 | .12000E+01 |
| 5. | .12000E+01 | .15000E+01 |
| 6. | -.60000E+00 | .00000E+01 |
| 7. | -.10000E+00 | .20000E+00 |

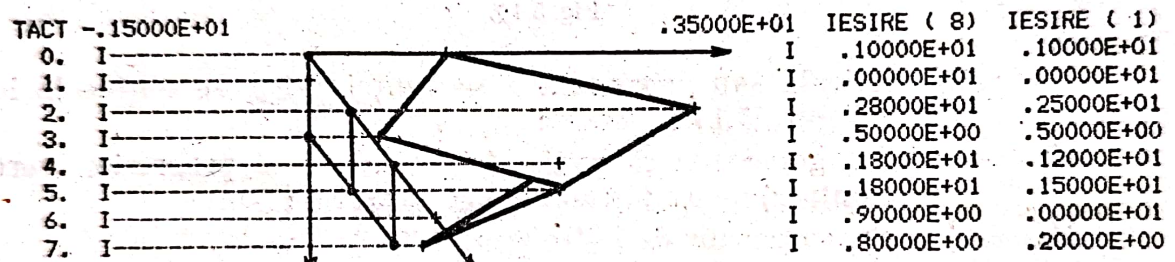
NUMAR LINII,COLOANE = 2, 3



TACT -.15000E+01 … .35000E+01

| TACT | IESIRE ( 8) | IESIRE ( 1) |
|---|---|---|
| 0. | .10000E+01 | .10000E+01 |
| 1. | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 2. | .25000E+01 | .25000E+01 |
| 3. | .80000E+00 | .50000E+00 |
| 4. | .12000E+01 | .12000E+01 |
| 5. | .18000E+01 | .15000E+01 |
| 6. | .60000E+00 | .00000E+01 |
| 7. | .50000E+00 | .20000E+00 |

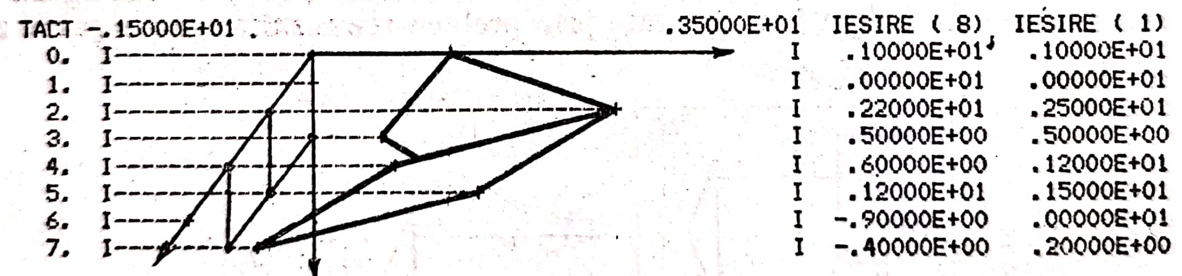
NUMAR LINII,COLOANE = 2, 3



TACT -.15000E+01 … .35000E+01

| TACT | IESIRE ( 8) | IESIRE ( 1) |
|---|---|---|
| 0. | .10000E+01 | .10000E+01 |
| 1. | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 2. | .28000E+01 | .25000E+01 |
| 3. | .50000E+00 | .50000E+00 |
| 4. | .18000E+01 | .12000E+01 |
| 5. | .18000E+01 | .15000E+01 |
| 6. | .90000E+00 | .00000E+01 |
| 7. | .80000E+00 | .20000E+00 |

NUMAR LINII,COLOANE = 2, 3



TACT -.15000E+01 … .35000E+01

| TACT | IESIRE ( 8) | IESIRE ( 1) |
|---|---|---|
| 0. | .10000E+01 | .10000E+01 |
| 1. | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 2. | .22000E+01 | .25000E+01 |
| 3. | .50000E+00 | .50000E+00 |
| 4. | .60000E+00 | .12000E+01 |
| 5. | .12000E+01 | .15000E+01 |
| 6. | -.90000E+00 | .00000E+01 |
| 7. | -.40000E+00 | .20000E+00 |

Fig. 5.18.

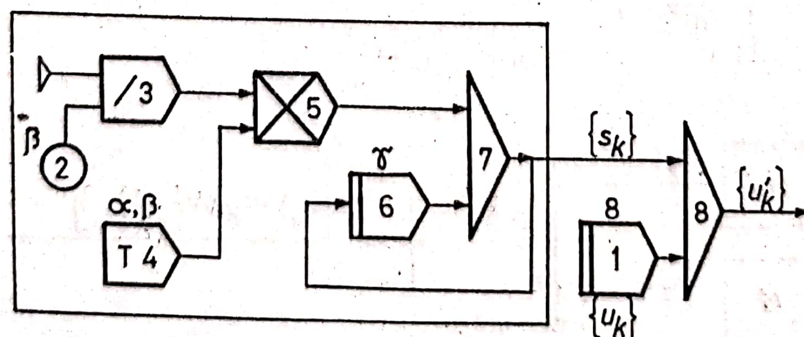



Fig. 5.19.

rimente de simulare consecutive (a—d), executate asupra m.s.r. prezentat în figura 5.19, unde :

— blocul de întîrziere cu numărul de identificare **1** generează secvenţa (5.2.);

— modelul de simulare **MS** generează proiecţia standard a unei progresii de dimensiuni egale cu cele ale secvenţei (5.1) — $M = 2$ şi $N = 3$—, verticală în cazurile **a** şi **b**, respectiv orizontală în cazurile **c** şi **d**. Cele patru e.s. au fost executate pentru următoarele valori ale parametrilor $\alpha$, $\beta$, $\gamma$:

**a.** : $\alpha = -0.3$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$
**b.** : $\alpha = 0.3$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$
**c.** : $\alpha = 0.3$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$
**d.** : $\alpha = -0.3$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$

*Valoarea parametrului* $\alpha$ se alege de obicei astfel încît reprezentarea spaţială **SS2D** să păstreze valoarea reală a raportului dintre unităţile de măsură pe axele $Ox$ şi $Oy$.

În cazul general acest raport este

$$\rho = \frac{ux}{uy} = \frac{nx \cdot d}{\sqrt{\left(\frac{50}{dif} \cdot \alpha\right)^2 + (ny \cdot d)^2}} = \frac{nx}{\sqrt{\left(\frac{50}{dif} \cdot \frac{c}{d} \cdot \alpha\right)^2 + ny^2}}, \tag{5.4}$$

unde $c$, $d$ şi $dif$ au semnificaţiile din observaţia **1**, iar valorile $nx$ şi $ny$ se stabilesc în funcţie de tipul sistemului de coordonate utilizat şi de tipul proiecţiei **1D** prelucrate astfel :

— în sistemele de coordonate de tipul **A** şi **B** :

$$nx = n1 = \begin{cases} M, & \text{pentru proiecţiile standard şi verticală,} \\ 1, & \text{pentru proiecţia orizontală,} \end{cases}$$

$$ny = n2 = \begin{cases} N, & \text{pentru proiecţiile standard şi orizontală} \\ 1, & \text{pentru proiecţia verticală,} \end{cases}$$

— în sistemele de coordonate de tipul **C** şi **D**.

$$nx = n2,$$
$$ny = n1.$$

Valoarea maximă a raportului $\rho$ se obţine pentru $\alpha = 0$, deci

$$\rho \leqslant \frac{nx}{ny}.$$

Din (5.4) rezultă că pentru păstrarea valorii reale a raportului $\rho$ dintre unităţile de măsură pe axele $Ox$ şi $Oy$ valoarea parametrului $\alpha$ trebuie calculată astfel :

$$\alpha = \frac{d}{c} \cdot \frac{dif}{50} \cdot \sqrt{\left(\frac{nx}{\rho}\right)^2 - ny^2}. \tag{5.5}$$



Scanned with OKEN Scanner

## 5.3. Procesorul de intrare/ieşire IOP2D

Componenta **IOP2D** a mediului interactiv de simulare SIM2D realizează în principal conversiile de intrare şi de ieşire specifice analizei prin simulare a sistemelor discrete bidimensionale. La baza proiectării procesorului de intrare/ieşire **IOP2D** au stat algoritmii de conversie **CIO** şi **CEO**, prezentaţi în § 4.4.

Ca şi celelalte componente ale mediului de simulare, **IOP2D** operează în regim conversaţional. **IOP2D** prelucrează două tipuri de fişiere secvenţiale pe disc:

— fişiere ce conţin proiecţii verticale sau orizontale ale unor secvenţe 2D, denumite în cele ce urmează *fişiere-matrice* (fişiere M);

— fişiere ce conţin proiecţii bidirecţionale standard ale unor secvenţe 2D, denumite *fişiere-secvenţă* (fişiere S); acestea sînt de regulă fişiere de intrare sau de ieşire prelucrate de către simulatorul **SS2D**.

Pe parcursul unei sesiuni de lucru cu procesorul **IOP2D** pot fi efectuate secvenţial una sau mai multe dintre următoarele prelucrări:

**a.** *Conversie matrice-secvenţă* (*C2D1D*) — aceasta constă în crearea unui fişier-secvenţă (S), utilizînd ca date valorile înregistrate într-un fişier-matrice (M) sau introduse de la consolă, în regim de dialog. La cererea utilizatorului valorile înregistrate în fişierul-secvenţă sînt afişate şi la consolă. Fişierele-secvenţă generate de procesorul de intrare/ieşire **IOP2D** sînt utilizate de obicei ca fişiere de intrare în experimentele de simulare efectuate cu simulatorul **SS2D**.

**b.** *Conversie secvenţă-matrice* (*C1D2D*) — în cazul acestui tip de conversie se generează un fişier-matrice (M), utilizînd ca date valorile din fişierul-secvenţă (S) specificat de către utilizator. Fişierul S prelucrat este de obicei un fişier de ieşire creat pe parcursul execuţiei unui experiment de simulare **SS2D**.

**c.** *Conversie de suport* (CS) — aceasta constă în transferul la consolă sau la imprimantă, a valorilor din secvenţa 2D a cărei proiecţie verticală sau orizontală este înregistrată în fişierul-matrice specificat de către utilizator. Transferul se realizează paginat, adică secvenţa 2D este împărţită în pagini (v. fig. 5.20) care se înregistrează separat.

În general o pagină are

$$np = \begin{cases} 6 \text{ coloane la consolă} \\ 10 \text{ coloane la imprimantă} \end{cases}$$

Numărul de coloane al ultimei pagini este $nu \in [1, np]$

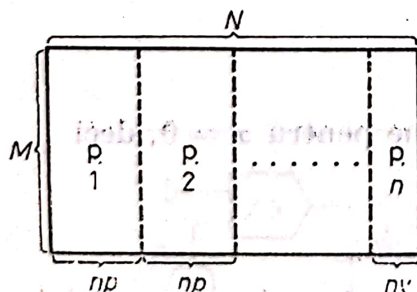



Fig. 5.20.

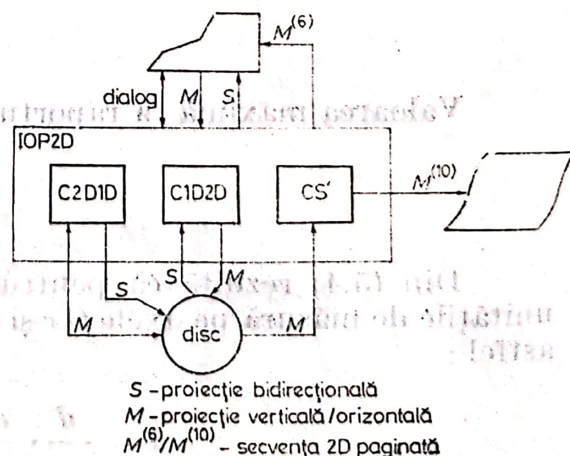



Fig. 5.21.

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | .100000E+01 | .000000E+01 | .000000E+01 | .160000E+01 |
| 1 | .100000E+01 | .000000E+01 | .300000E+01 | .10000[illegible] |
| 2 | .100000E+01 | .100000E+01 | .360000E+01 | .1600 |

Fig. 5.22.

Numărul de pagini $n$ în care este împărțită o secvență 2D de dimensiuni $M$, $N$ se determină cu formula

$$n = \left[\frac{N + (np - 1)}{np}\right],$$

iar numărul de coloane din ultima pagină este

$$nu = N - (n - 1)\,np.$$

În figura 5.21 sînt prezentate structura generală a procesorului de intrare/ieșire **IOP2D** și modul în care acesta comunică cu mediul extern, iar figura 5.22 prezintă rezultatul transferului la imprimantă a valorilor dintr-o secvență 2D de dimensiuni $M = 3$ și $N = 4$.

## 5.4. Procesorul de reprezentare grafică GRAF2D

Procesorul **GRAF2D** este o componentă a versiunii mediului interactiv de simulare **SIM2D**, implementată pentru microcalculatoarele de producție românească FELIX M118, al căror terminal grafic oferă facilități de reprezentare grafică adecvată. **GRAF2D** este conceput și realizat pentru utilizare în regim interactiv. Pe parcursul unei sesiuni de lucru **GRAF2D** utilizatorul primește în permanență indicații cu privire la prelucrările ce pot fi efectuate și la modul de selectare a prelucrărilor dorite. Acest procesor oferă utilizatorilor săi o gamă largă de facilități, prezentate succint în cele ce urmează.

Reprezentările grafice realizate de către procesorul **GRAF2D** sînt reprezentări de tip rețea, obținute prin interconectarea punctelor corespunzătoare valorilor elementelor adiacente din secvențele 2D. Aceste valori sînt interpretate ca reprezentări ale cotelor punctelor de pe o suprafață. Sistemul de coordonate în care se realizează reprezentările grafice este cel din figura 5.23.

Principalii parametri ai reprezentării grafice sînt:

— unghiul de fugă, $U$;

— unitățile de măsură pe axe $ux$, $uy$, $uz$.

Acești parametri au valorile implicite

$$U = 30 \text{ grade},$$

$$ux = uy = uz = 1,$$

dar ele pot fi modificate de către utilizator ori de cîte ori acest lucru este necesar.

În afara reprezentării grafice normale (în sistemul de coordonate din figura 5.23), denumită vedere frontală, utilizatorul poate opta și pentru alte tipuri de reprezentări:

— vederi laterale — din stînga, din dreapta sau din spate;

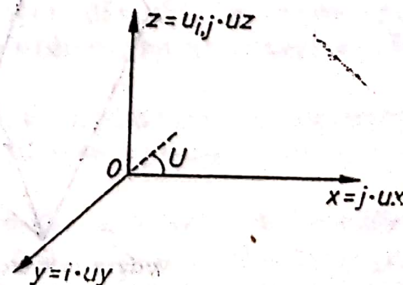


Fig. 5.23.

— vederi reflectate de planul $xOy$, $xOz$ sau $yOz$;

— reprezentări grafice comparative a două, trei sau patru vederi dintre cele şapte posibile, enumerate anterior;

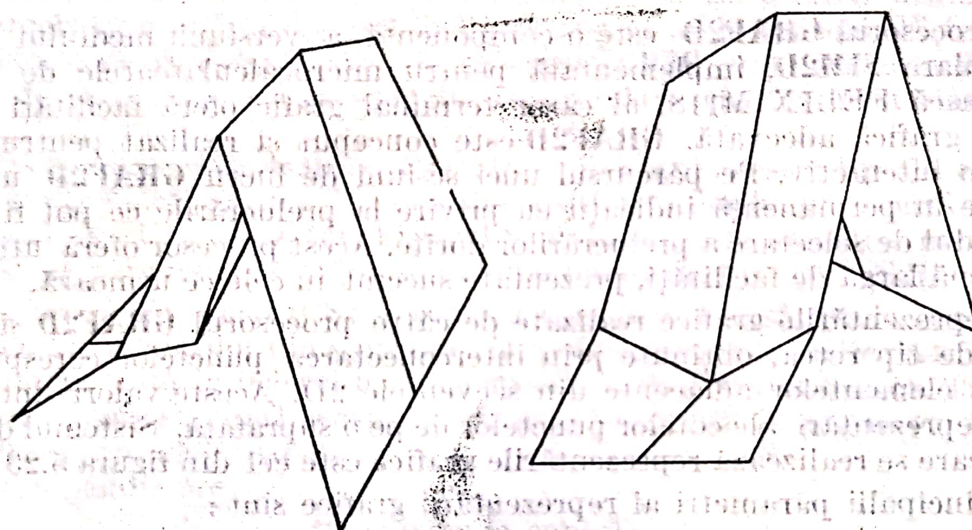
— vederi succesive ale secvenţei 2D (suprafeţei), cu varierea unghiului de fugă, utilizînd valoarea iniţială şi valoarea incrementului specificate de către utilizator.

Limitele de încadrare a reprezentărilor grafice sînt alese automat, astfel încît imaginile secvenţelor 2D să se reprezinte corect şi integral în zonele destinate trasării lor.

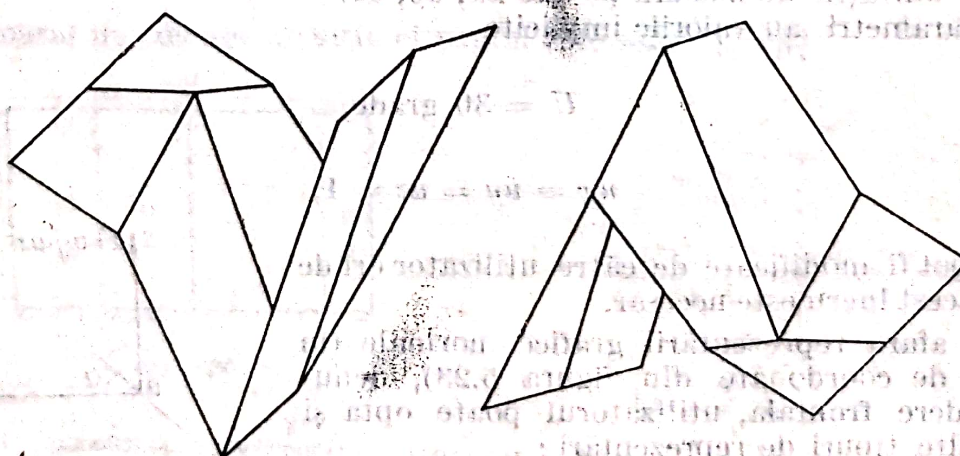
De asemenea, utilizatorul poate opta pentru reprezentări grafice din care se elimină liniile ascunse.

În figura 5.24 sînt prezentate diferite vederi ale unei secvenţe 2D $\{u_{m,n}\}$, de dimensiuni $M = 3$ şi $N = 4$, cu următoarea configuraţie:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1.6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3.6 & 0.5 \\ 1 & 1.6 & 3.6 & 0 \end{Bmatrix}$$



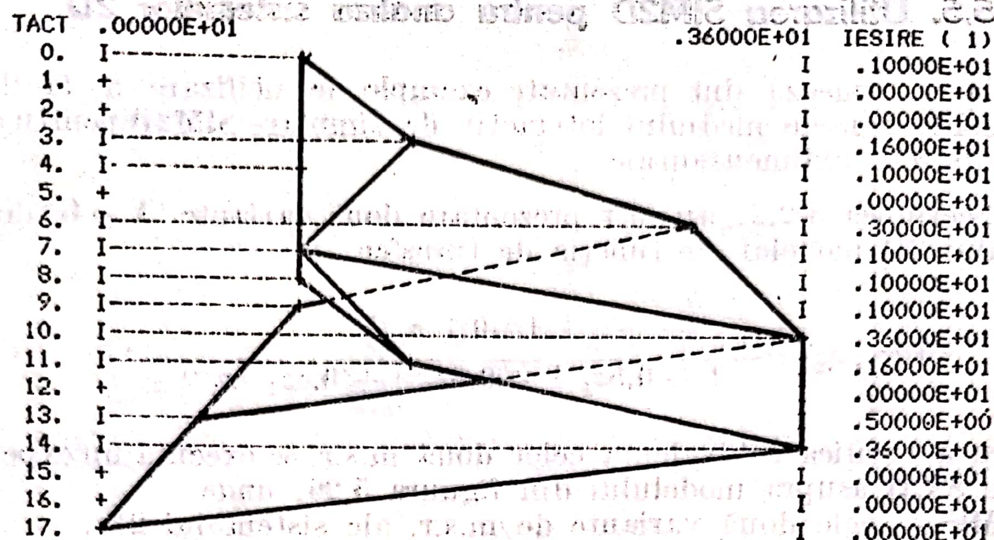
a. Vedere din faţă b. Vedere din stînga



c. Vedere reflectată de planul $xOy$ d. Vedere din spate

Fig. 5.24.

NUMAR LINII,COLOANE = 3, 4




NUMAR LINII,COLOANE = 3, 4

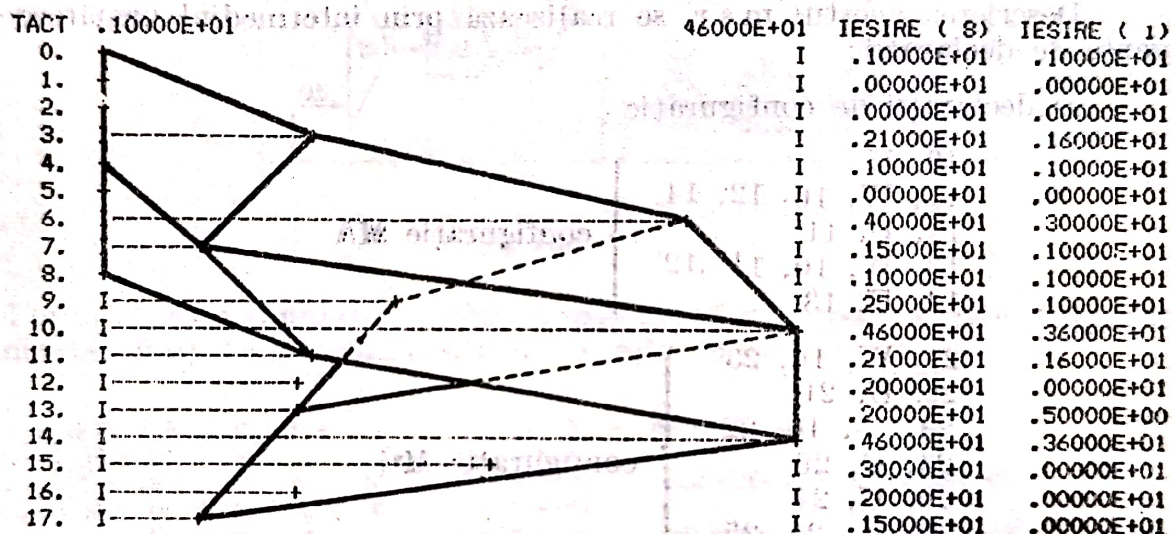



**Fig. 5.25.**

Figura 5.25 prezintă două variante de reprezentare spaţială **SS2D** a aceleiaşi secvenţe — prima obţinută prin prelucrarea proiecţiei standard nemodificate, iar cea de-a doua realizată conform celor prezentate în secţiunea 5.2.5., în sistemul de coordonate din figura 5.16c.

Descrierea secvenţelor 2D ce trebuie reprezentate grafic (dimensiunile $M$, $N$ şi valorile celor $M \cdot N$ elemente) pot fi introduse fie de la consolă, fie dintr-un fişier pe disc flexibil, specificat de către utilizator. Acest fişier trebuie să conţină proiecţia verticală sau orizontală a secvenţei 2D care se reprezintă grafic. Fişierele prelucrate de către **GRAF2D** sînt de obicei fişiere-matrice (M) create de către procesorul de intrare/ieşire **IOP2D**.

Utilizatorului i se oferă posibilitatea modificării interactive a descrierii secvenţei 2D prelucrate la un moment dat, prin modificarea valorilor unuia sau mai multor elemente ale acestuia.

O altă facilitate oferită de **GRAF2D** este aceea de salvare a descrierilor secvenţelor 2D în fişiere pe disc flexibil, indicate de către utilizator, de unde pot fi preluate pentru o prelucrare ulterioară de către oricare dintre componentele mediului interactiv de simulare **SIM2D**.



Scanned with OKEN Scanner

## 5.5. Utilizarea SIM2D pentru analiza sistemelor 2D

În cele ce urmează sînt prezentate exemple de utilizare a facilităţilor oferite de componentele mediului interactiv de simulare **SIM2D** pentru analiza sistemelor discrete bidimensionale.

**I.** În secţiunea 3.2.2. au fost prezentate două variante (**A** şi **G**) de m.s.r. ale sistemului 2D modelat de funcţia de transfer

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 - 0.1\, z_1^{-1}}{1 - 0.5z_1^{-1} - 0.8z_2^{-1} + 0.4z_1^{-1}z_2^{-1}}.$$

Pentru a verifica echivalenţa celor două m.s.r. se execută un experiment de simulare **SS2D** asupra modelului din figura 5.26, unde

**MA, MG** — cele două variante de m.s.r. ale sistemului 2D;

**MI** — m.s.r. generator al intrării — s-a optat pentru intrare de tipul impuls unitar, de dimensiuni $M = 4$, $N = 5$.

Descrierea acestui m.s.r. se realizează prin intermediul următoarei secvenţe de declaraţii:

a) declaraţii de configuraţie

| | |
|---|---|
| 10, U<br>11, W, 10, 12, 14<br>12, U, 11<br>13, W, 10, 11 ,12<br>14, U, 13 | configuraţie **MA** |
| 21, W, 10, 23<br>22, U, 21<br>23, +, 10, 22<br>24, G, 26<br>25, U, 24<br>26, +, 23, 25 | configuraţie **MG** |

b) declaraţii de parametri

| | |
|---|---|
| 10,1<br>11, 1, 0.8,1<br>12, 4<br>13, —0.1, 0.5, —0.4<br>14,5 | parametri **MA** |
| 21, —0.1, 0.5<br>22, 5<br>24, 0.8<br>25, 4 | parametri **MG** |

c) declaraţii de iniţializare a blocului de întîrziere cu numărul de identificare 10, cu o singură condiţie iniţială $c_0 = 1$

10

1

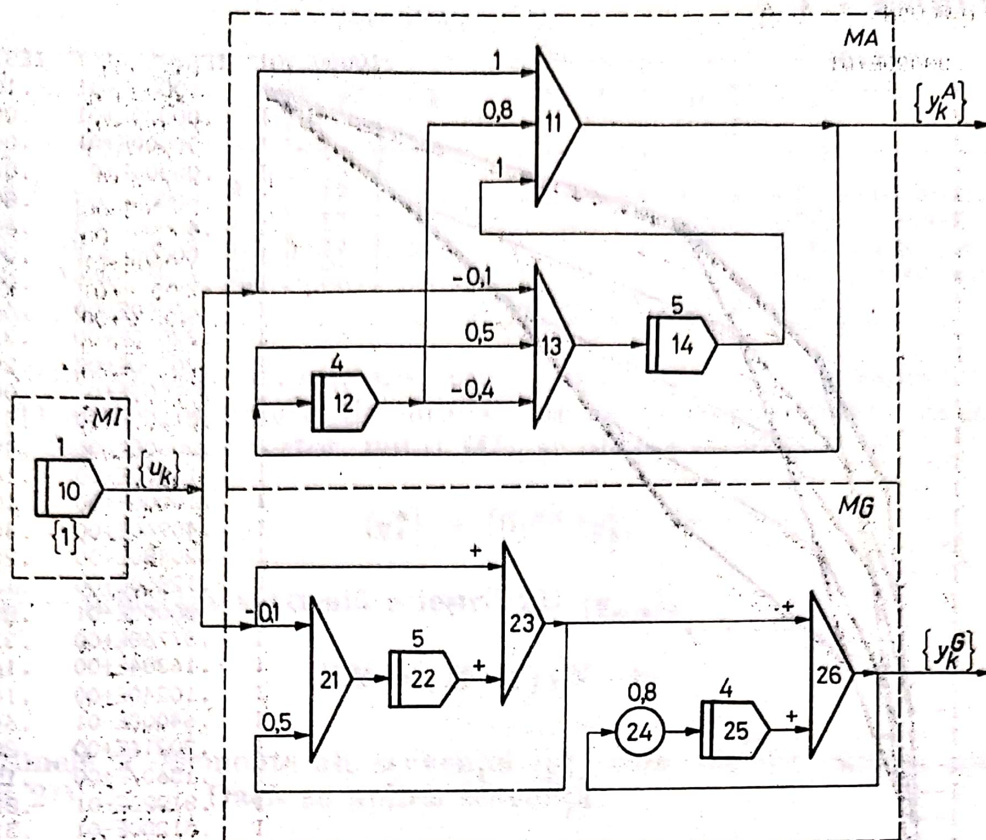



Fig. 5.26.

Forma în care simulatorul **SS2D** înregistrează pe suport extern (consolă, imprimantă, disc) descrierea acestui m.s.r. este următoarea :

| BLOC | TIP | I N T R A R I | | | P A R A M E T R I | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | U | 0 | 0 | 0 | .100000E+01 | | |
| 11 | W | 10 | 12 | 14 | .100000E+01 | .800000E+00 | .100000E+01 |
| 12 | U | 11 | 0 | 0 | .400000E+01 | | |
| 13 | W | 10 | 11 | 12 | -.100000E+00 | .500000E+00 | -.400000E+00 |
| 14 | U | 13 | 0 | 0 | .500000E+01 | | |
| 21 | W | 10 | 23 | 0 | -.100000E+00 | .500000E+00 | |
| 22 | U | 21 | 0 | 0 | .500000E+01 | | |
| 23 | + | 10 | 22 | 0 | | | |
| 24 | G | 26 | 0 | 0 | .800000E+00 | | |
| 25 | U | 24 | 0 | 0 | .400000E+01 | | |
| 26 | + | 23 | 25 | 0 | | | |

INITIALIZARI BLOCURI DE INTIRZIERE

10 :
.100000E+01

Deoarece obiectivul experimentului de simulare este verificarea echivalenței celor două variante de m.s.r., rezultă că în acest caz variabilele de interes sînt reprezentate de variabilele de ieșire ale m.s.r. **MA** și **MG**, deci variabilele de ieșire ale blocurilor **11** și respectiv **26**. Dacă m.s.r. **MA** și **MG** sînt echivalente, atunci evoluția celor două variabile de ieșire trebuie să fie identică. Pentru a verifica acest lucru s-a optat pentru un fișier de rezultate cu suport imprimantă, în care se înregistrează reprezentarea grafică și tabelară a ieșirii blocului **11**, respectiv reprezentarea tabelară a ieșirii blocului **26**.

Rezultatele obținute, prezentate în figura 5.27, confirmă echivalența celor două modele de simulare.



Scanned with OKEN Scanner

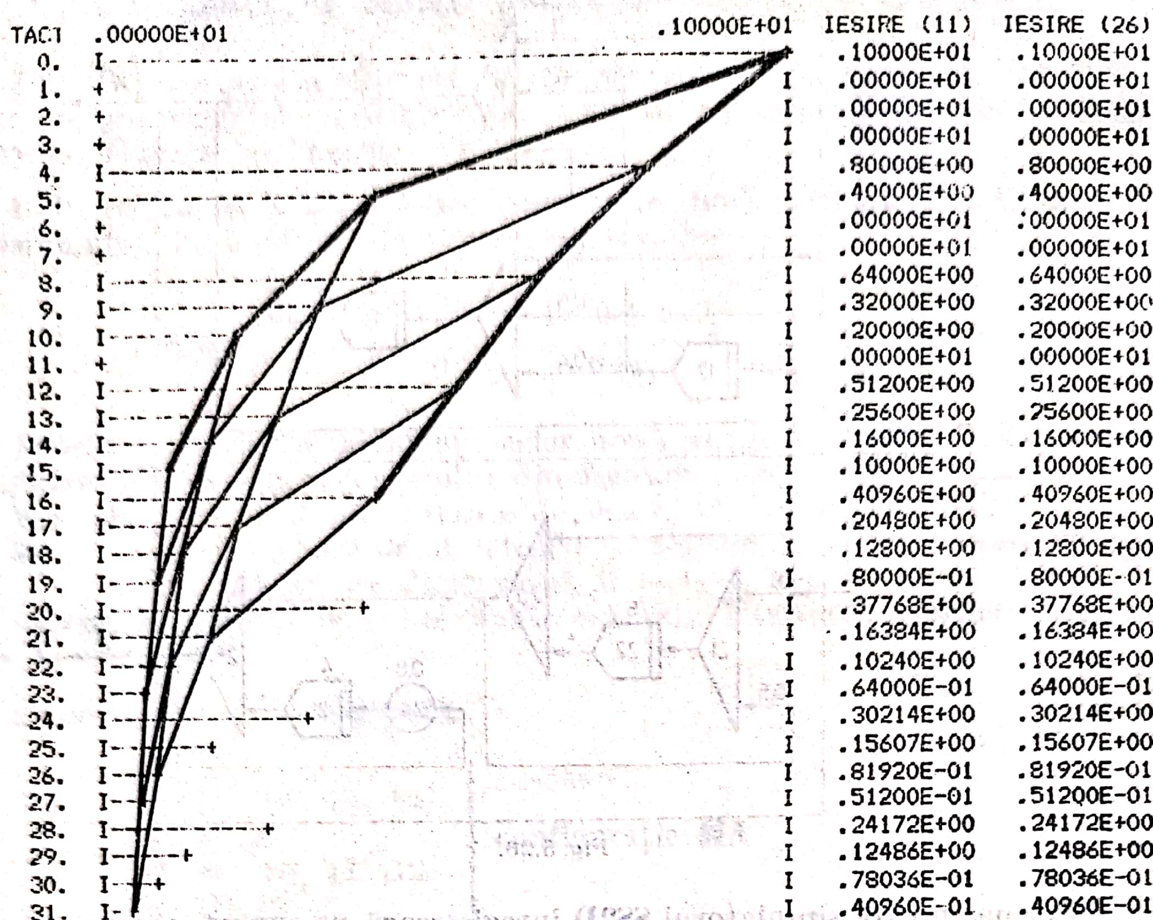



**Fig. 5.27.**

Figura 5.27 pune în evidenţă şi reprezentarea spaţială a ieşirii 2D a sistemului analizat. Această reprezentare a fost obţinută prin aplicarea algoritmului din secţiunea 5.2.5 asupra reprezentării grafice furnizate de simulatorul **SS2D**, pentru ieşirea blocului **11**.

**II.** Rezultatele experimentelor de simulare **SS2D**, efectuate asupra m.s.r. ale sistemelor 2D, sînt reprezentate de secvenţe 1D. Pentru a obţine reprezentări tabelare 2D, asupra acestor secvenţe 1D trebuie efectuată conversia 1D—2D (de ieşire). Aceasta poate fi realizată în unul din următoarele moduri :

**a)** Prelucrînd ieşirea 1D a modelului de simulare al sistemului analizat astfel :

— se stabileşte corespondenţa dintre indicii secvenţei 2D ($i = 0, 1, \ldots, \ldots, M-1$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$) şi indicii semnificativi ai proiecţiei bidirecţionale a acesteia ($k \in S_{M,N}$). În cazul unei secvenţe 2D de dimensiuni $M = 4$, $N = 5$, valorile indicilor semnificativi sînt cele din tabelul 5.3 ;

— din secvenţa de valori obţinute ca rezultat al experimentului de simulare se extrag cele obţinute la momente de calcul cu indici egali cu indicii semnificativi, valori care se inserează în locaţiile corespunzătoare din reprezentarea tabelară a secvenţei 2D.

Reprezentarea tabelară obţinută pe această cale pentru ieşirea 2D a sistemului modelat de m.s.r. **MA** este cea din tabelul 5.4.

Utilizarea acestei soluţii de obţinere a reprezentărilor tabelare ale secvenţelor 2D se justifică numai în cazul în care acestea au dimensiuni reduse.

*Tabelul 5.3*

| i \ j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | k=0 | 4 | 8 | 12 | 16 |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| 2 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 |
| 3 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 |

*Tabelul 5.4*

| i \ j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.8 | 0.64 | 0.512 | 0.4096 |
| 1 | 0.4 | 0.32 | 0.256 | 0.2048 | 0.16384 |
| 2 | 0.2 | 0.16 | 0.128 | 0.1024 | 0.08192 |
| 3 | 0.1 | 0.08 | 0.064 | 0.0512 | 0.04096 |

**b)** Prin simulare, cu ajutorul unui m.s.r. convertor de ieşire (vezi 4.3.2), conectat la ieşirea modelului de simulare al sistemului analizat. La ieşirea modelului de simulare convertor, notat **ME**, se obţine secvenţa

$$\{y_k^*\} = \{0\}^{NR}\, \{y_k^v\},$$

unde $\{y_k^v\}$ — proiecţia verticală a ieşirii 2D $\{y_{m,n}\}$,

$$NR = (M-1)\,(N-1).$$

Ultimele $M$ elemente ale secvenţei $\{y_k^*\}$ sînt cele din ultima coloană ale secvenţei 2D $\{y_{m,n}\}$. Dacă se aplică secvenţa

$$\{y_k^{N-1}\} = \{y_k^*\}$$

la intrarea unui bloc de întîrziere de ordinul $M$, la ieşirea acestuia se obţine secvenţa $\{y_k^{N-2}\}$, ale cărei ultime $M$ elemente sînt cele din coloana $(N-2)$ a secvenţei 2D $\{y_{m,n}\}$. Rezultă că la ieşirea unei cascade de $(N-1)$ blocuri de întîrziere de ordin $M$, cu intrare $\{y_k^*\}$ se obţine secvenţa $\{y_k^0\}$, care se termină cu elementele din prima coloană (cu indicele 0) a secvenţei 2D $\{y_{m,n}\}$.

Pe baza acestor observaţii a fost sintetizat m.s.r. cu configuraţia din figura 5.28, care permite obţinerea reprezentării tabelare a ieşirii 2D a sistemului 2D modelat de m.s.r. **MA**, cu intrare şi ieşire de dimensiuni $M = 4$, $N = 5$. Proiecţia standard a secvenţei 2D de intrare este generată de modelul de simulare **MI**.

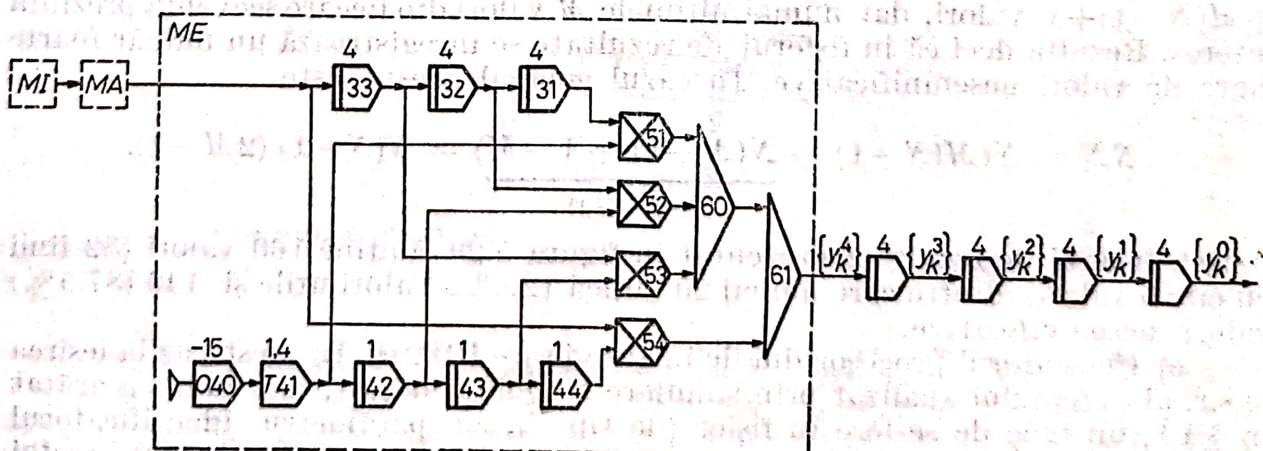



Fig. 5.28.

În cazul în care **MA** şi **MI** au configuraţia din exemplul anterior, iar **ME** este m.s.r. convertor de ieşire, descrierea **SS2D** a modelului de simulare din figura 5.28 este următoarea:

```
BLOC TIP  I N T R A R I     P A R A M E T R I
 10   U    0    0    0   .100000E+01
 11   W   10   12   14   .100000E+01   .800000E+00   .100000E+01
 12   U   11    0    0   .400000E+01
 13   W   10   11   12  -.100000E+00   .500000E+00  -.400000E+00
 14   U   13    0    0   .500000E+01
 31   U   32    0    0   .400000E+01
 32   U   33    0    0   .400000E+01
 33   U   11    0    0   .400000E+01
 10   O   76    0    0  -.120000E+02
 41   T   40    0    0   .100000E+01   .400000E+01
 42   U   41    0    0   .100000E+01
 43   U   42    0    0   .100000E+01
 44   U   43    0    0   .100000E+01
 51   X   31   41    0
 52   X   32   42    0
 53   X   33   43    0
 54   X   11   44    0
 60   +   51   52   53
 61   +   60   54    0
 62   U   61    0    0   .400000E+01
 63   U   62    0    0   .400000E+01
 64   U   63    0    0   .400000E+01
 65   U   64    0    0   .400000E+01
  INITIALIZARI BLOCURI DE INTIRZIERE
 10   :
        .100000E+01
```

Figura 5.29 prezintă conţinutul fişierului de rezultate **SS2D**, în care au fost înregistrate valorile obţinute pe parcursul execuţiei e.s. la ieşirile blocurilor **65, 64, 63, 62, 61** din configuraţia m.s.r. din fig. 5.28. Se constată că ultimele 4 linii de rezultate oferă reprezentarea tabelară a secvenţei 2D $\{y_{m,n}\}$.

Această soluţie de generare a reprezentărilor tabelare ale secvenţelor 2D prezintă două dezavantaje importante:

— creşterea complexităţii şi ordinului m.s.r asupra cărora se efectuează experimente de simulare prin adăugarea m.s.r. **ME** şi a cascadei de blocuri de întîrziere de la ieşirea acestuia;

— utilizarea ineficientă a suportului extern pe care este înregistrat fişierul de rezultate. Se constată în cazul unei secvenţe 2D de dimensiuni $M$, $N$ că în fişierul de rezultate se înregistrează $N$ secvenţe de cîte $NT = N(M-1) + M(N-1)+1$ valori, dar numai ultimele $M$ valori din fiecare secvenţă prezintă interes. Rezultă deci că în fişierul de rezultate se înregistrează un număr foarte mare de valori nesemnificative. În cazul general acesta este

$$NN = N(M(N-1) + \underbrace{N(M-1) + 1 - M}_{(M-1)(N-1)}) = N(N-1)(2M-1).$$

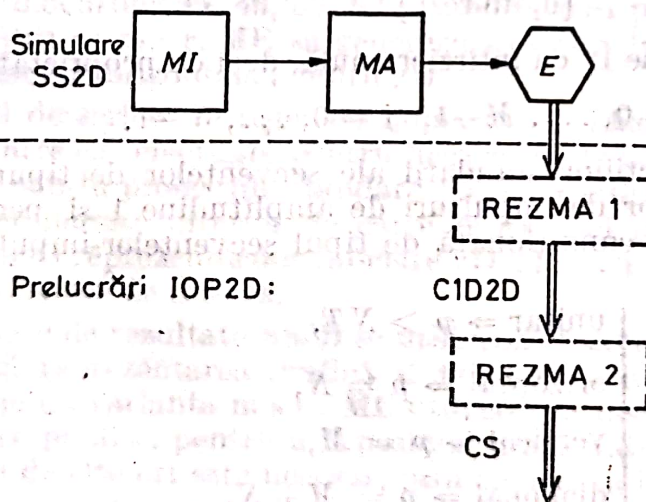
Astfel, fişierul de rezultate prezentat în figura 5.29 conţine 160 valori (32 linii cu cîte 5 valori), dintre care numai 20 (adică 12.5%) valori utile şi 140 (87.5%) valori nesemnificative.

**c)** Cu ajutorul procesorului de intrare/ieşire **IOP2D**. În acest caz la ieşirea m.s.r. al sistemului analizat prin simulare trebuie conectat, aşa cum s-a arătat în § 4.1, un bloc de scriere în fişier (de tip **E**), cu parametru identificatorul fişierului în care se transferă secvenţa aplicată la intrarea sa. Conţinutul acestui fişier este prelucrat ulterior de către **IOP2D**.

NUMAR LINII,COLOANE = 4, 5

| TACT | IESIRE( 65) | IESIRE( 64) | IESIRE( 63) | IESIRE( 62) | IESIRE( 61) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 1. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 2. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 3. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 4. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 5. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 6. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 7. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 8. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 9. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 10. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 11. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 |
| 12. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .10000E+01 |
| 13. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .40000E+00 |
| 14. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .20000E+00 |
| 15. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .10000E+00 |
| 16. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .10000E+01 | .80000E+00 |
| 17. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .40000E+00 | .32000E+00 |
| 18. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .20000E+00 | .16000E+00 |
| 19. | .00000E+01 | .00000E+01 | .00000E+01 | .10000E+00 | .80000E-01 |
| 20. | .00000E+01 | .00000E+01 | .10000E+01 | .80000E+00 | .64000E+00 |
| 21. | .00000E+01 | .00000E+01 | .40000E+00 | .32000E+00 | .25600E+00 |
| 22. | .00000E+01 | .00000E+01 | .20000E+00 | .16000E+00 | .12800E+00 |
| 23. | .00000E+01 | .00000E+01 | .10000E+00 | .80000E-01 | .64000E-01 |
| 24. | .00000E+01 | .10000E+01 | .80000E+00 | .64000E+00 | .51200E+00 |
| 25. | .00000E+01 | .40000E+00 | .32000E+00 | .25600E+00 | .20480E+00 |
| 26. | .00000E+01 | .20000E+00 | .16000E+00 | .12800E+00 | .10240E+00 |
| 27. | .00000E+01 | .10000E+00 | .80000E-01 | .64000E-01 | .51200E-01 |
| 28. | .10000E+01 | .80000E+00 | .64000E+00 | .51200E+00 | .40960E+00 |
| 29. | .40000E+00 | .32000E+00 | .25600E+00 | .20480E+00 | .16384E+00 |
| 30. | .20000E+00 | .16000E+00 | .12800E+00 | .10240E+00 | .81920E-01 |
| 31. | .10000E+00 | .80000E-01 | .64000E-01 | .51200E-01 | .40960E-01 |

Fig. 5.29.




**** FISIER :F0:REZMA2

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | .100000E+01 | .800000E+00 | .640000E+00 | .512000E+00 | .409600E+00 |
| 1 | .400000E+00 | .320000E+00 | .256000E+00 | .204800E+00 | .163840E+00 |
| 2 | .200000E+00 | .160000E+00 | .128000E+00 | .102400E+00 | .819200E-01 |
| 3 | .100000E+00 | .800000E-01 | .640000E-01 | .512000E-01 | .409600E-01 |

Fig. 5.30.

Astfel, prin conversia 1D—2D a conținutului fișierului REZMA1, creat pe parcursul execuției unui e.s. **SS2D** asupra m.s.r. din figura 5.30, **IOP2D** a creat fișierul-matrice REZMA2. În figura 5.30 este prezentat și rezultatul transferului la imprimantă (conversiei de suport) a conținutului fișierului REZMA2.

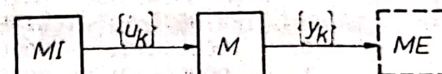



Fig. 5.31.

**III.** Analiza răspunsului unui sistem 2D la diverse tipuri de intrări necesită execuția unei secvențe de experimente de simulare asupra unui m.s.r. care, în cazul cel mai general, are structura din figura 5.31.

Componentele acestui m.s.r. au următoarele funcții :

**MI** — modelul generator al proiecției standard $\{u_k\}$ a secvenței de intrare $\{u_{m,n}\}$;

**M** — modelul de simulare al sistemului 2D analizat, la ieșirea căruia se obține secvența $\{y_k\}$, din care se sintetizează secvența 2D de ieșire $\{y_{m,n}\}$;

**ME** — modelul de simulare destinat prelucrării secvenței $\{y_k\}$; în funcție de obiectivele concrete ale e.s. efectuate, acesta poate lipsi sau poate fi un m.s.r. convertor de ieșire, un bloc de scriere în fișier (de tip **E**) etc.

În cele ce urmează sînt prezentate rezultatele e.s. efectuate pentru a determina răspunsul sistemului 2D cu funcția de transfer

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 + 0.3\, z_1^{-1} + 0.032\, z_2^{-1} + 0.1\, z_1^{-1} z_2^{-1}}{1 - 0.5\, z_1^{-1} - 0.6\, z_2^{-1} + 0.3\, z_1^{-1} z_2^{-1}},$$

la secvențe de intrare de dimensiuni $M = 6$, $N = 5$, de următoarele tipuri :

**a.** impuls unitar;

**b, c.** impuls orizontal și, respectiv, vertical de amplitudine 1 și durată 1,

**d.** impuls diagonal cu proprietatea

$$u_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } i = j, \\ 0, & \text{în rest;} \end{cases}$$

**e.** treaptă de amplitudine 1, cu întîrziere nulă, deci cu proprietatea

$$u_{i,j} = 1, \quad i = 0, \ldots, M-1, \; j = 0, \ldots, N-1.$$

Pentru generarea proiecțiilor standard ale secvențelor de tipurile **a**—**d** se utilizează un bloc generator de impulsuri de amplitudine 1 și perioadă $p$. Valoarea parametrului $p$ este condiționată de tipul secvențelor-impuls ce trebuie generate, astfel :

$$\text{impuls} \begin{cases} \text{unitar} \Rightarrow p > NT, \\ \text{orizontal} \Rightarrow p = N, \\ \text{vertical} \Rightarrow p = M, \\ \text{diagonal} \Rightarrow p = M + N, \end{cases}$$

unde $M$, $N$ — dimensiunile secvenței 2D, iar $NT = N(M-1) + M(N-1) + 1$.

În cazul **e** se utilizează m.s.r. generator din figura 5.32, unde valorile parametrilor $p$ și $q$ se aleg, în cazul general, în funcție de dimensiunile secvenței 2D de intrare, după cum urmează :

$$p = \text{maxim}\,(M, N),$$

$$q = \text{minim}\,(M, N).$$

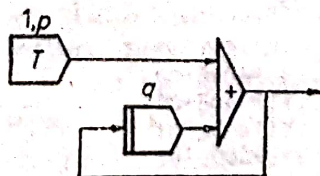



Fig. 5.32.

Pentru a obține o imagine cît mai concludentă asupra răspunsului sistemului analizat la cele cinci tipuri de intrări s-a optat pentru realizarea, în fiecare caz în parte, a cîte două reprezentări spațiale. Acestea se obțin prin prelucrarea reprezentărilor grafice **SS2D** ale proiecțiilor verticală și orizontală ale fiecărui tip de ieșire.

Figura 5.33 pune în evidență atît configurația m.s.r. **M** al sistemului 2D analizat, cît și a m.s.r. convertor de ieșire **ME**, pentru cazul în care acesta trebuie

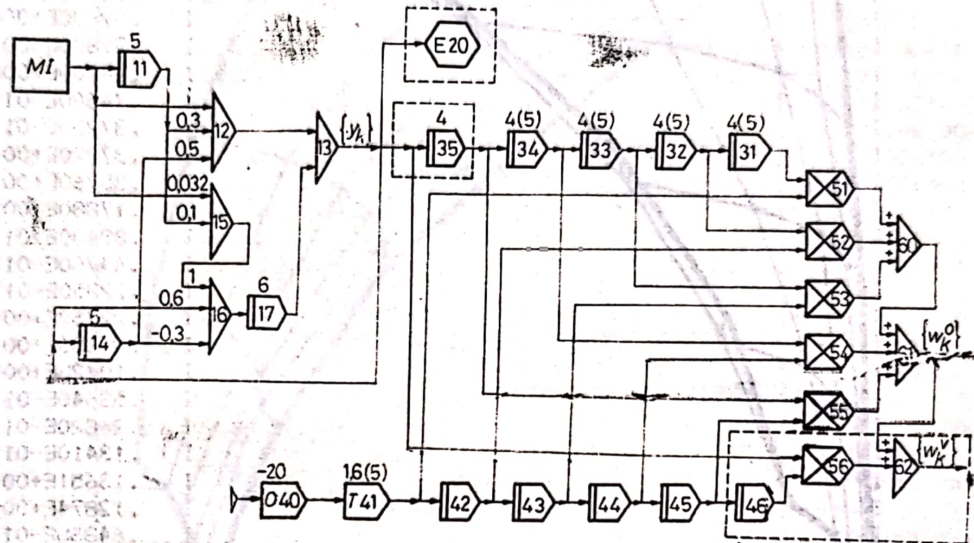



**Fig. 5.33.**

să furnizeze secvența $\{w_k^v\}$, ale cărei ultime $M \cdot N$ elemente reprezintă proiecția verticală a ieșirii 2D. În figură sînt indicate și modificările ce trebuie operate (eliminarea blocurilor **35, 46, 56, 62** și modificarea parametrilor blocurilor **41** și **31—34**) pentru ca m.s.r. **ME** să genereze secvența $\{w_k^o\}$, care conține în partea sa finală proiecția orizontală a ieșirii 2D.

Blocul de scriere în fișier cu numărul de identificare **20** se utilizează în cîte unul dintre e.s. efectuate pentru fiecare tip de intrare, pentru a crea fișiere-secvență ce conțin proiecțiile standard ale celor cinci tipuri de ieșiri 2D. Aceste fișire sînt prelucrate ulterior de către procesorul de intrare/ieșire **IOP2D** în scopul obținerii reprezentărilor tabelare 2D ale răspunsului sistemului analizat în cele cinci cazuri de interes.

Ca fișiere de rezultate **SS2D** se utilizează fișiere cu suport disc, în care se înregistrează reprezentarea grafică și tabelară a ieșirii blocului **62**, respectiv **61**, în funcție de varianta m.s.r. **ME** utilizată în fiecare e.s. în parte (s-a optat pentru fișiere pe disc, pentru a fi posibilă multiplicarea rapidă a conținutului acestora, ori de cîte ori este necesar, prin copiere la imprimantă).

Reprezentările tabelare și reprezentările spațiale **SS2D** ale răspunsului sistemului analizat la intrări de tip **a—e** sînt prezentate în figurile 5.34—5.38, în care se utilizează notațiile

$\{a_{m,n}\}$ — $\{e_{m,n}\}$, pentru secvențele 2D de ieșire,

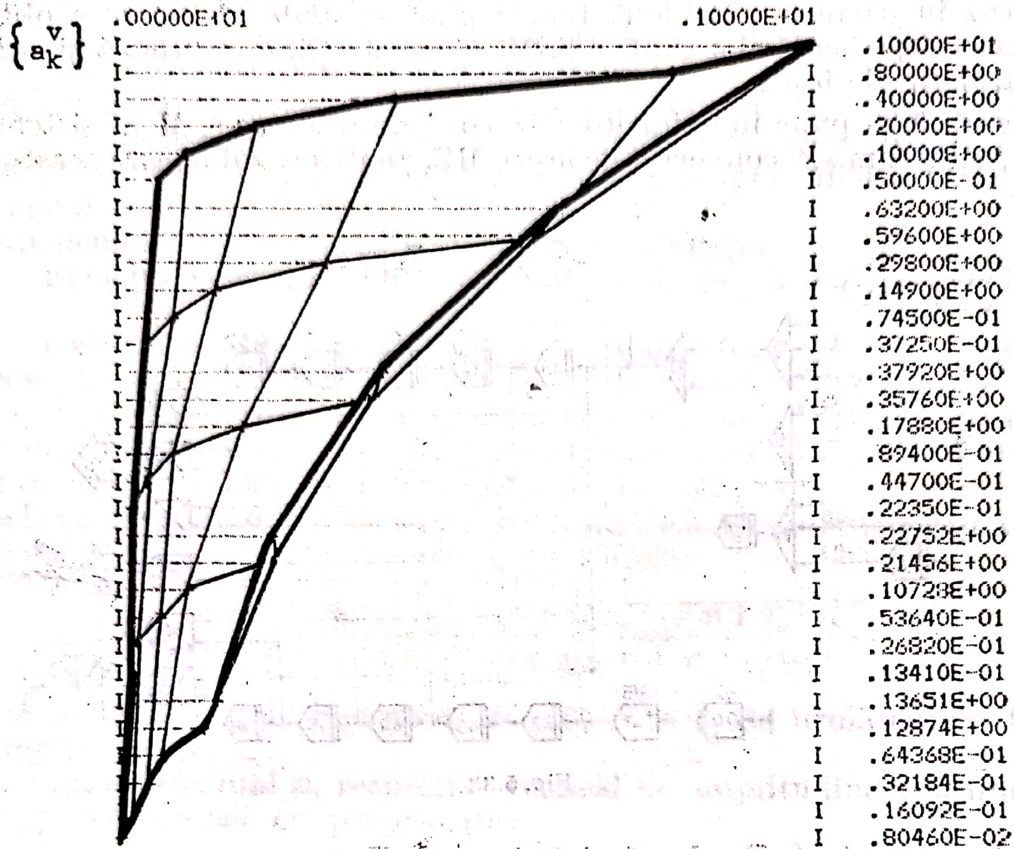
$\{a_k^{v/o}\}$—$\{e^{v/o}_k\}$ pentru proiecțiile verticale și, respectiv, orizontale ale acestora.

Limitele de încadrare ale reprezentărilor grafice **SS2D** utilizate pentru a obține reprezentările spațiale au fost alese astfel încît să ofere imagini complete și clare (cu rezoluția maximă posibilă pentru aceste tipuri de reprezentări). Totuși, pentru a facilita compararea rezultatelor obținute, în cazurile **b — d**



Scanned with OKEN Scanner

| $\{a_{m,n}\}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| .10000E+01 | .63200E+00 | .37920E+00 | .22752E+00 | .13651E+00 |
| .80000E+00 | .59600E+00 | .35760E+00 | .21456E+00 | .12874E+00 |
| .40000E+00 | .29800E+00 | .17880E+00 | .10728E+00 | .64368E-01 |
| .20000E+00 | .14900E+00 | .89400E-01 | .53640E-01 | .32184E-01 |
| .10000E+00 | .74500E-01 | .44700E-01 | .26820E-01 | .16092E-01 |
| .50000E-01 | .37250E-01 | .22350E-01 | .13410E-01 | .80460E-02 |



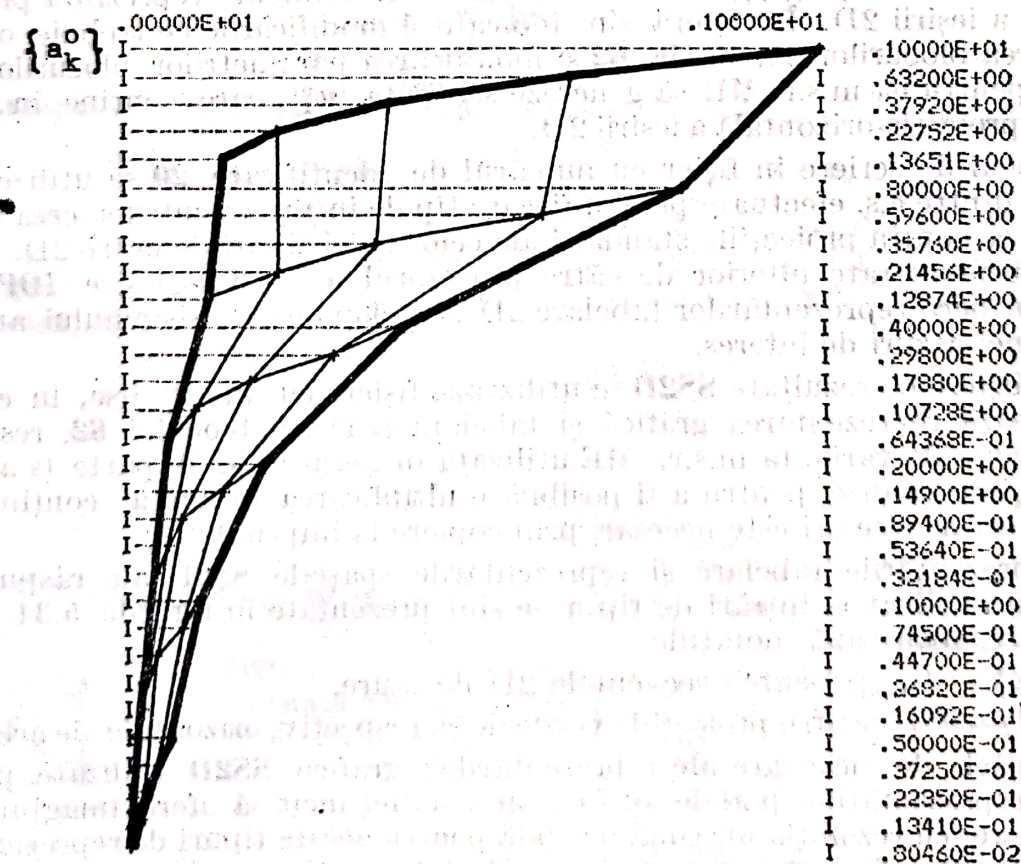
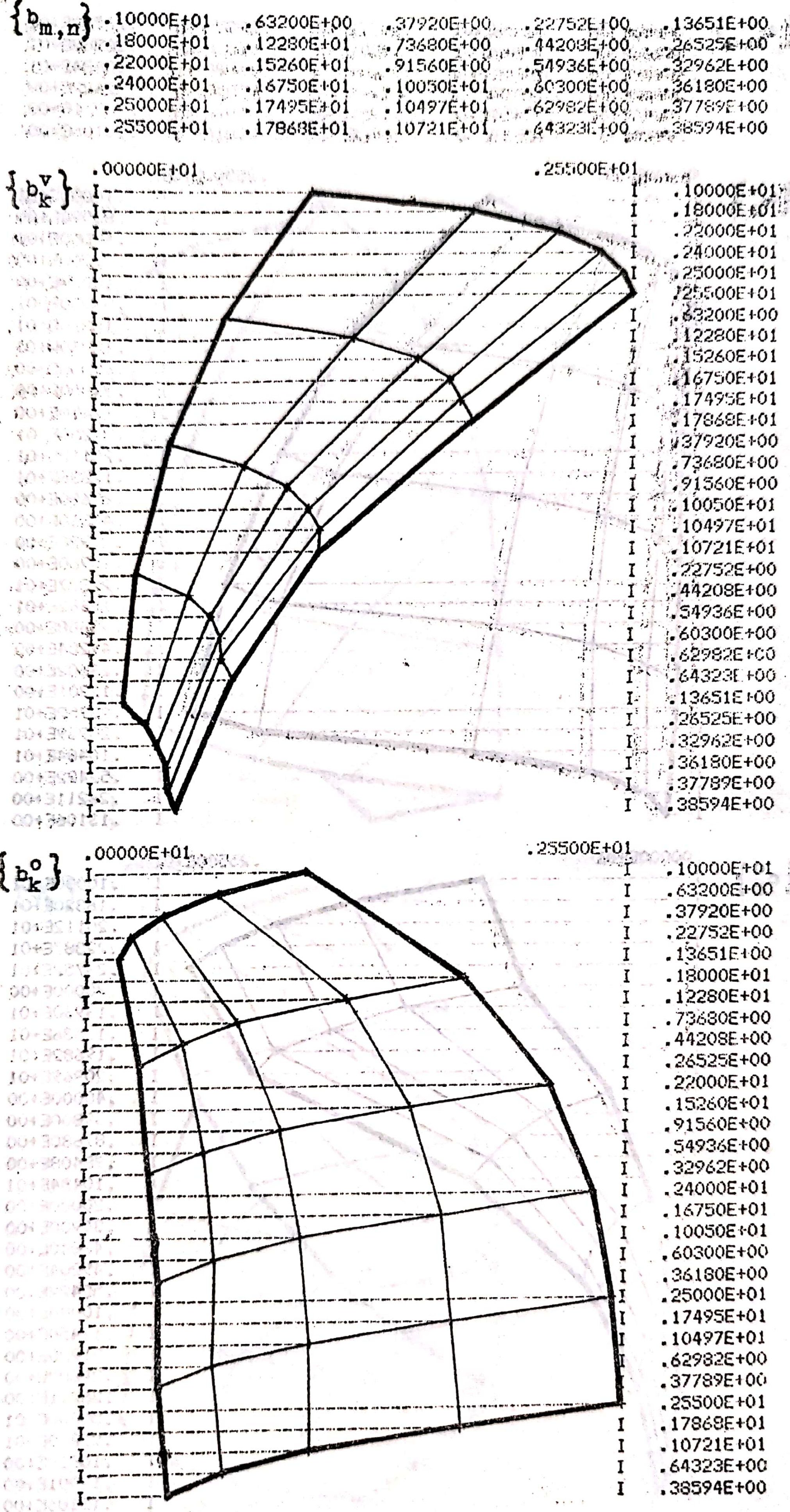




**Fig. 5.34**



| $\{b_{m,n}\}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| .10000E+01 | .63200E+00 | .37920E+00 | .22752E+00 | .13651E+00 |
| .18000E+01 | .12280E+01 | .73680E+00 | .44208E+00 | .26525E+00 |
| .22000E+01 | .15260E+01 | .91560E+00 | .54936E+00 | .32962E+00 |
| .24000E+01 | .16750E+01 | .10050E+01 | .60300E+00 | .36180E+00 |
| .25000E+01 | .17495E+01 | .10497E+01 | .62982E+00 | .37789E+00 |
| .25500E+01 | .17868E+01 | .10721E+01 | .64323E+00 | .38594E+00 |

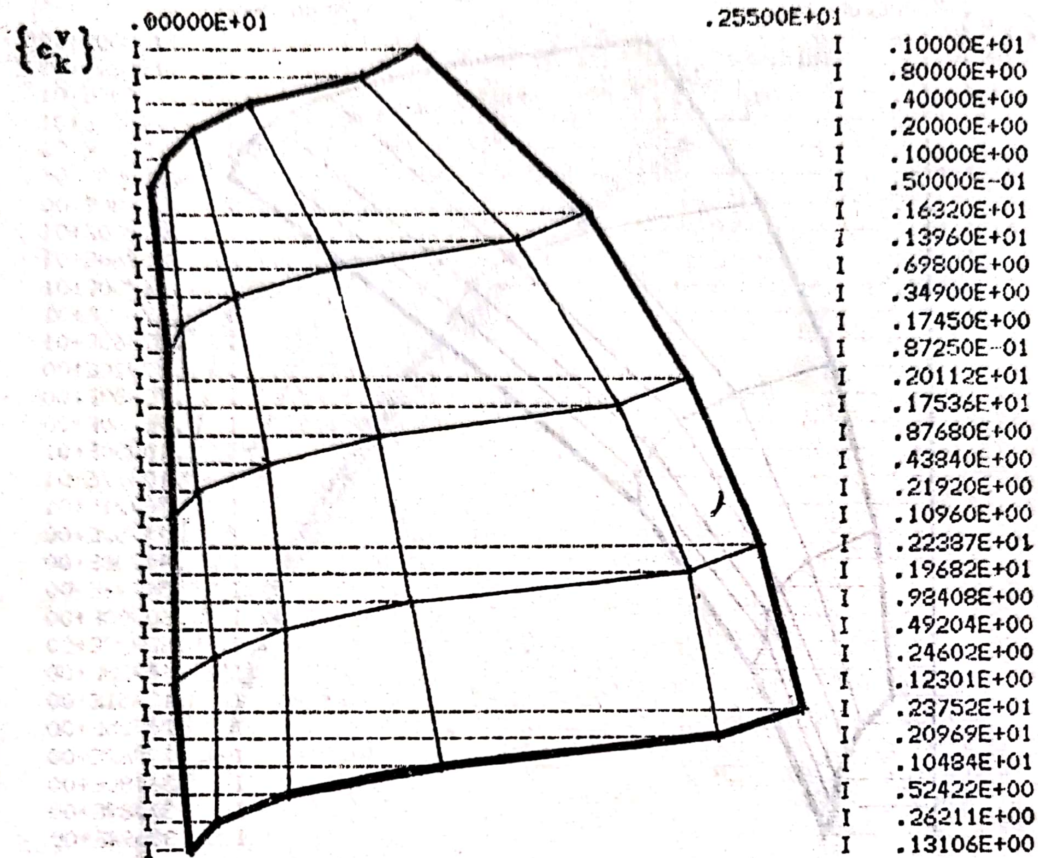


Fig. 5.35.

$\{c_{m,n}\}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| .10000E+01 | .16320E+01 | .20112E+01 | .22387E+01 | .23752E+01 |
| .80000E+00 | .13960E+01 | .17536E+01 | .19682E+01 | .20969E+01 |
| .40000E+00 | .69800E+00 | .87680E+00 | .98408E+00 | .10484E+01 |
| .20000E+00 | .34900E+00 | .43840E+00 | .49204E+00 | .52422E+00 |
| .10000E+00 | .17450E+00 | .21920E+00 | .24602E+00 | .26211E+00 |
| .50000E-01 | .87250E-01 | .10960E+00 | .12301E+00 | .13106E+00 |

$\{c_k^v\}$




$\{c_k^o\}$

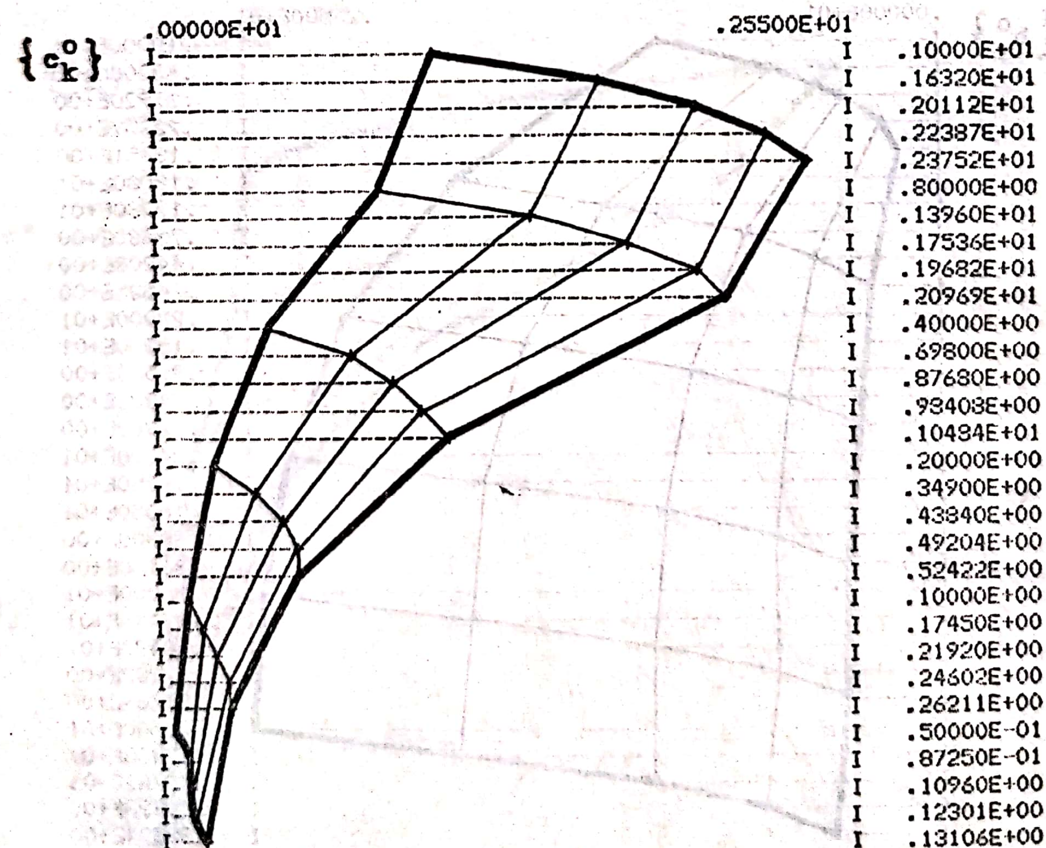
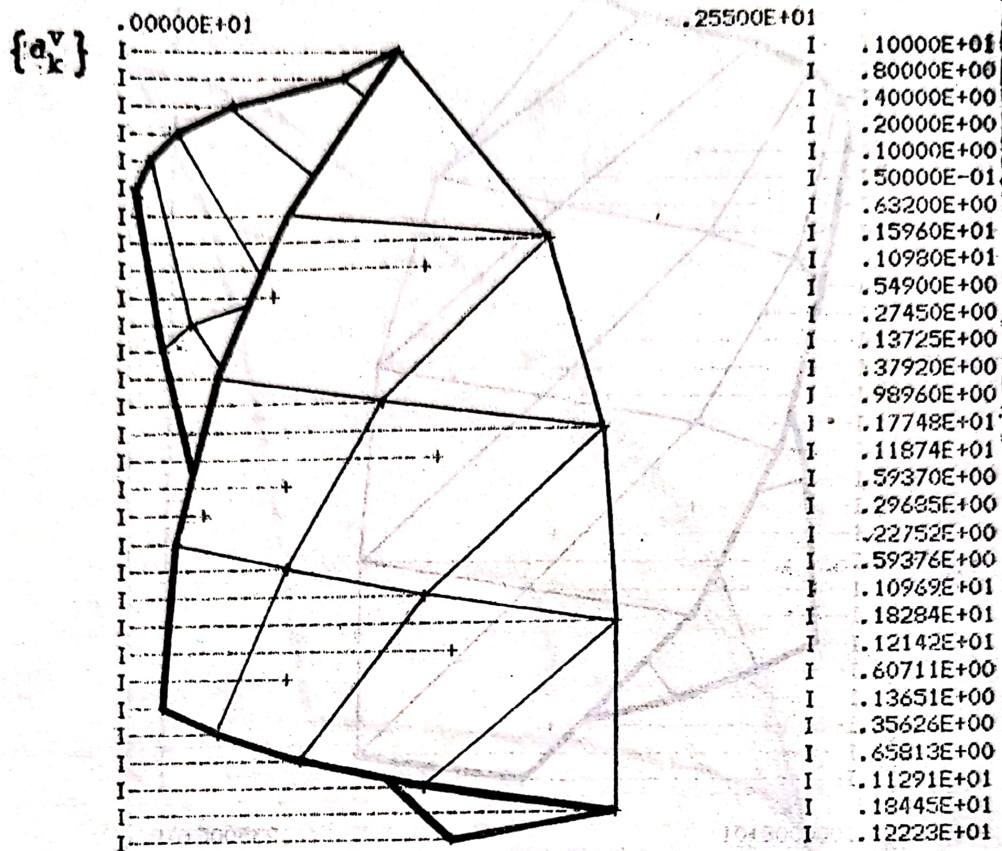



Fig. 5.36.

| $\{a_{m,n}\}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | .10000E+01 | .63200E+00 | .37920E+00 | .22752E+00 | .13651E+00 |
| | .80000E+00 | .15960E+01 | .98960E+00 | .59376E+00 | .35626E+00 |
| | .40000E+00 | .10980E+01 | .17748E+01 | .10969E+01 | .65813E+00 |
| | .20000E+00 | .54900E+00 | .11874E+01 | .18284E+01 | .11291E+01 |
| | .10000E+00 | .27450E+00 | .59370E+00 | .12142E+01 | .18445E+01 |
| | .50000E-01 | .13725E+00 | .29685E+00 | .60711E+00 | .12223E+01 |



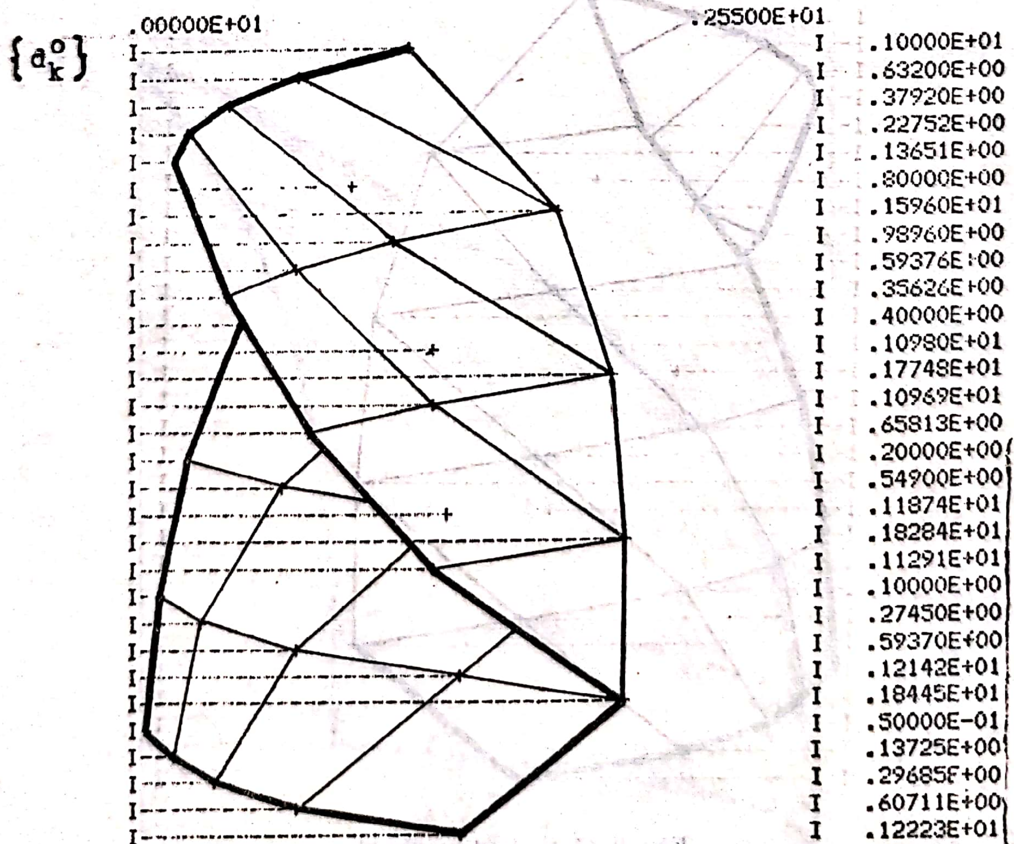




Fig. 5.37 a. vederi reflectate.

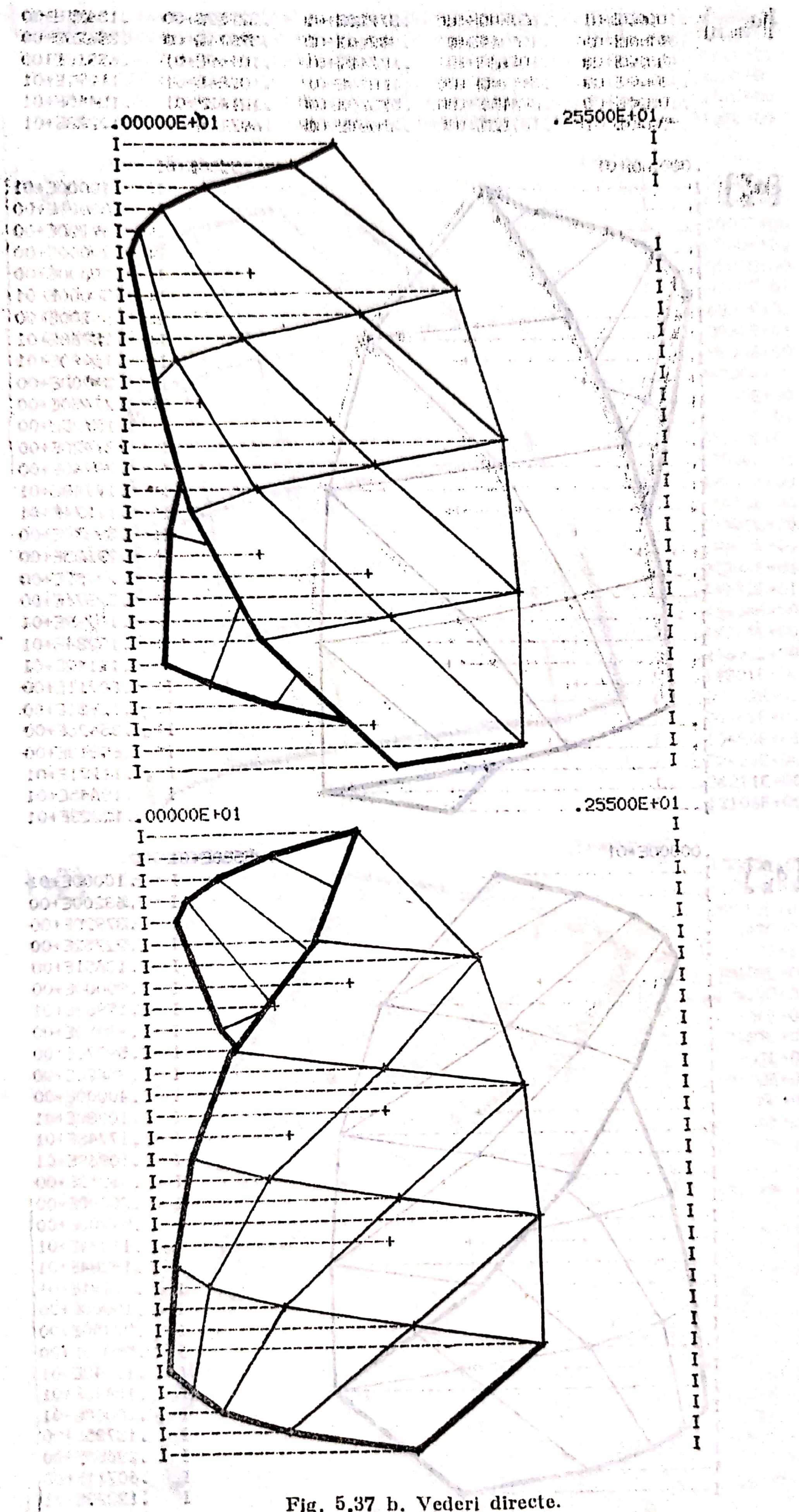
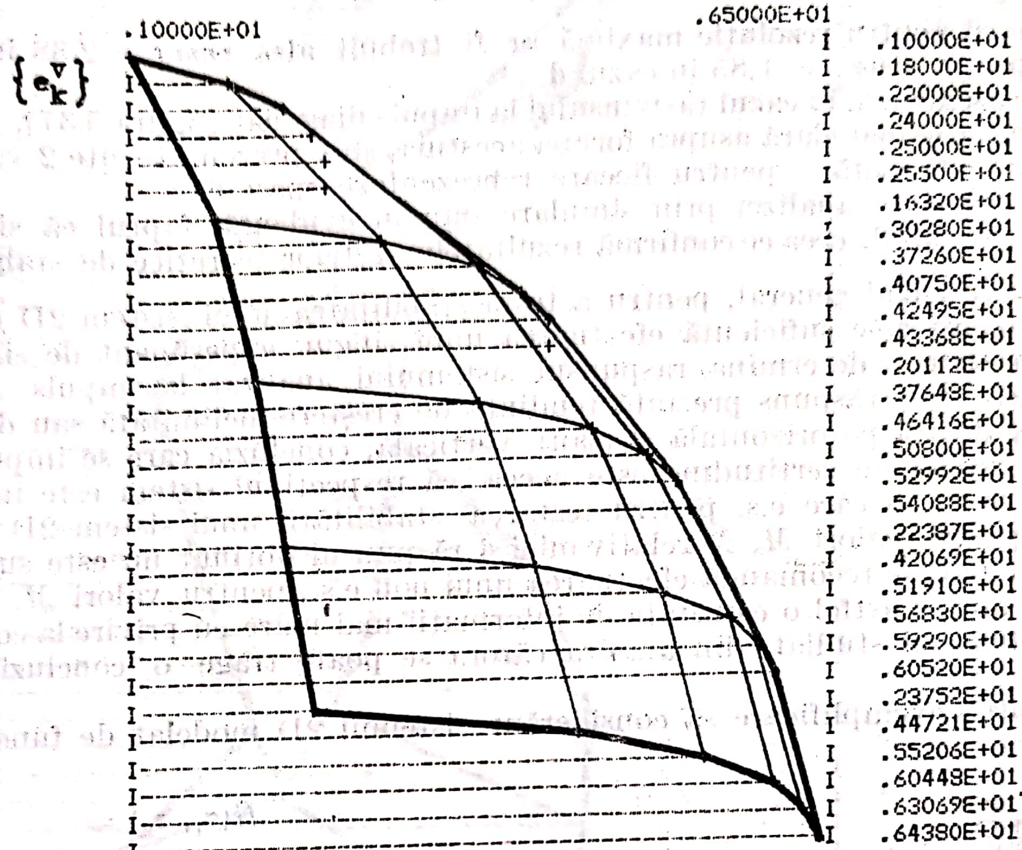



Fig. 5.37 b. Vederi directe.

$\{e_{m,n}\}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| .10000E+01 | .16320E+01 | .20112E+01 | .22387E+01 | .23752E+01 |
| .18000E+01 | .30280E+01 | .37648E+01 | .42069E+01 | .44721E+01 |
| .22000E+01 | .37260E+01 | .46416E+01 | .51910E+01 | .55206E+01 |
| .24000E+01 | .40750E+01 | .50800E+01 | .56830E+01 | .60448E+01 |
| .25000E+01 | .42495E+01 | .52992E+01 | .59290E+01 | .63069E+01 |
| .25500E+01 | .43368E+01 | .54088E+01 | .60520E+01 | .64380E+01 |



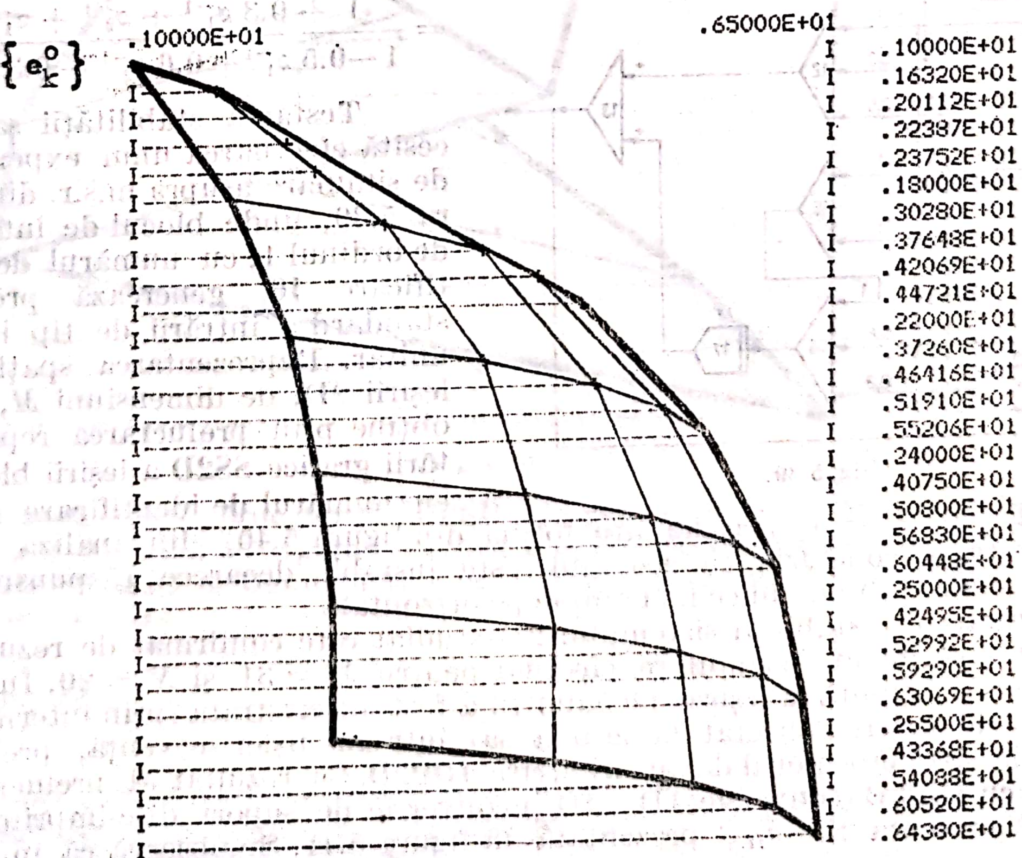




Fig. 5.38.

(figurile 5.35—5.37) limitele de încadrare sînt identice

$$vmin = 0, \quad vmax = 2.55$$

cu toate că pentru rezoluție maximă ar fi trebuit ales $vmax = 2.38$ în cazul c și, respectiv, $vmax = 1.85$ în cazul **d.**

De asemenea, în cazul răspunsului la impuls diagonal (figura 5.37), pentru a da o imagine mai clară asupra formei acestuia, sînt prezentate cîte 2 variante directă și reflectată — pentru fiecare reprezentare spațială.

Rezultatele analizei prin simulare pun în evidență faptul că sistemul studiat este stabil, ceea ce confirmă rezultatele testelor teoretice de stabilitate.

**IV.** În cazul general, pentru a testa stabilitatea unui sistem 2D de cele mai multe ori este suficientă efectuarea unui singur experiment de simulare **SS2D**, pentru a determina răspunsul sistemului analizat la impuls unitar.

Dacă acest răspuns prezintă tendință de creștere nelimitată sau de oscilație amplificată pe orizontală și (sau) verticală, concluzia care se impune cu un grad ridicat de certitudine este aceea că respectivul sistem este instabil.

În cazul în care e.s. pentru testarea stabilității unui sistem 2D a fost realizat pentru valori $M$, $N$ relativ mici și răspunsul obținut nu este suficient de concludent, se recomandă efectuarea unui nou e.s., pentru valori $M$, $N$ mai mari. Se obține astfel o cantitate de informații mai mare cu privire la comportarea sistemului studiat, din analiza cărora se poate trage o concluzie mai corectă.

Pentru exemplificare să considerăm sistemul 2D modelat de funcția de transfer

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 + 0.3\, z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1}}{1 - 0.5\, z_1^{-1} + 0.6\, z_2^{-1} + 0.3\, z_1^{-1} z_2^{-1}}$$

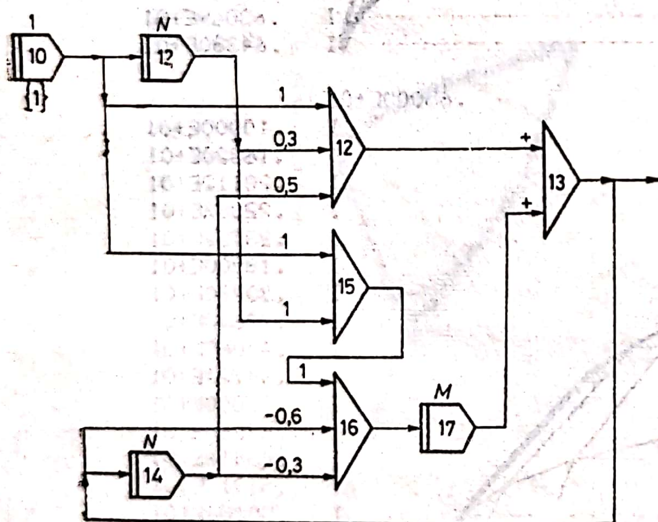


Fig. 5.39.

Testarea stabilității sale necesită efectuarea unui experiment de simulare asupra m.s.r. din figura 5.39, unde blocul de întîrziere de ordinul 1, cu numărul de identificare **10**, generează proiecția standard a intrării de tip impuls unitar. Reprezentarea spațială a ieșirii 2D, de dimensiuni $M$, $N$, se obține prin prelucrarea reprezentării grafice **SS2D** a ieșirii blocului cu numărul de identificare **13**. În cazul $M = 6$, $N = 5$, aceasta are forma din figura 5.40, din analiza căreia se poate trage concluzia că sistemul este instabil, deoarece răspunsul său prezintă oscilații din ce în ce mai ample pe orizontală.

Caracterul instabil al sistemului 2D studiat este confirmat de rezultatul unui nou experiment de simulare, efectuat pentru $M = 31$ și $N = 20$. În acest caz secvența obținută la ieșirea blocului 13 a fost înregistrată (prin intermediul unui bloc de scriere conectat la ieșirea sa) într-un fișier-secvență, prelucrat ulterior de către procesorul de intrare/ieșire **IOP2D**. Ca rezultat al prelucrărilor realizate cu **IOP2D** (conversie 1D—2D și conversie de suport disc-imprimantă) se obține secvența 2D $\{y_{m,n}\}$ prezentată în figura 5.41. Se observă că în etapa



Scanned with OKEN Scanner

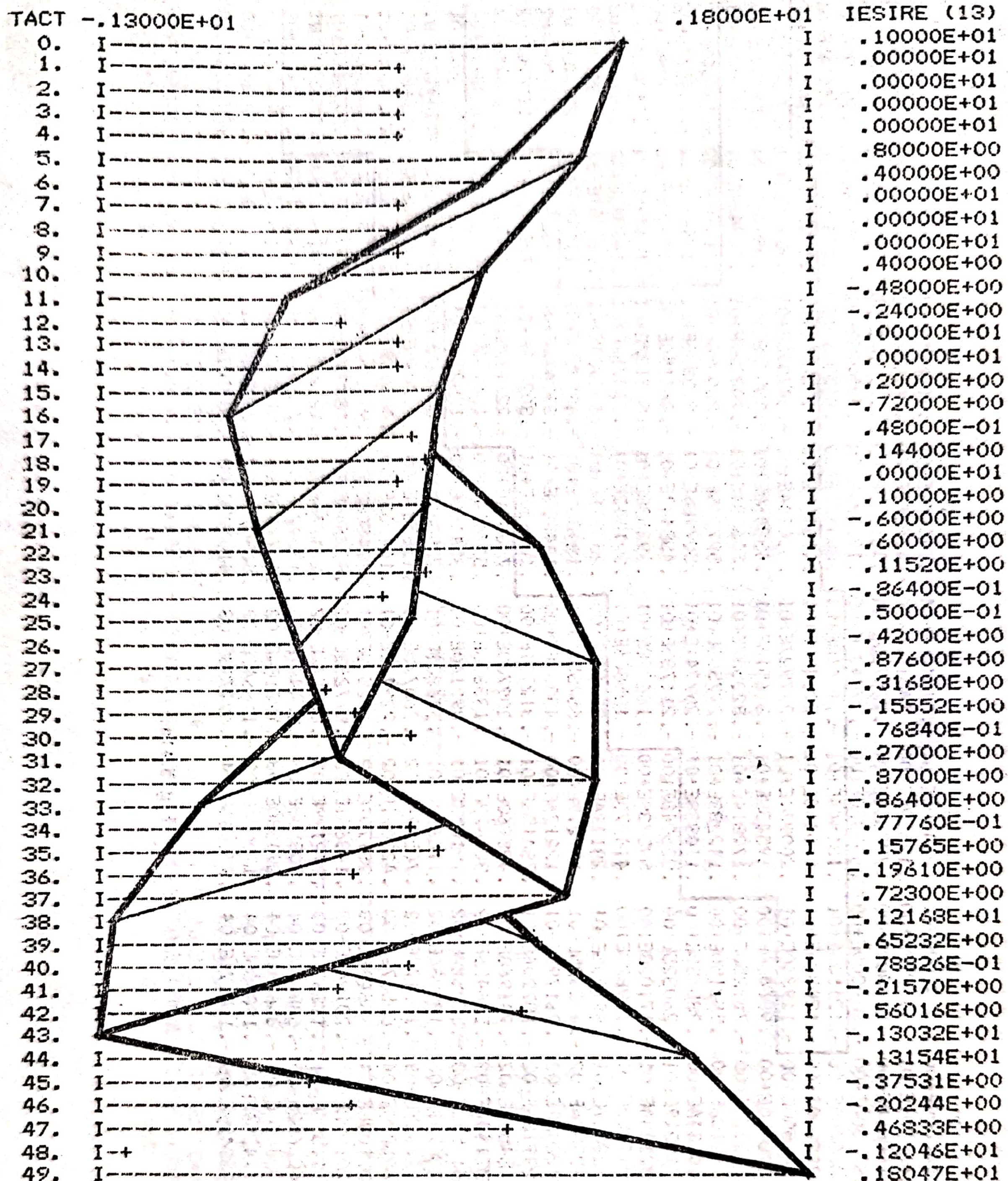



**Fig. 5.40.**

de conversie de suport procesorul **IOP2D** a împărțit secvența 2D în două pagini (fig. 5.41 a și b), tipărite separat. Pentru a evidenția caracterul instabil al sistemului 2D studiat, în figura 5.41 sînt delimitate zonele în care apar valori $y_{i,j}$ cu proprietatea

$$|y_{i,j}| \geqslant v, \; v = 1, 10, 100 \ldots$$

sau, echivalent,

$$|y_{i,j}| \geqslant 10^k, \; k = 0, 1, \ldots$$

Se obțin astfel *curbe de nivel*, care dau o imagine deosebit de sugestivă asupra modului în care sistemul 2D analizat prin simulare numerică răspunde la secvența 2D aplicată la intrarea sa.



Scanned with OKEN Scanner

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | .100000E+01 | .400000E+00 | -.240000E+00 | .144000E+00 | -.864000E-01 | .518400E-01 | -.311040E-01 | .186624E-01 | -.111974E-01 | .671847E-02 |
| 1 | .800000E+00 | -.480000E+00 | .480001E-01 | .115200E+00 | -.155520E+00 | .145152E+00 | -.118195E+00 | .895795E-01 | -.649452E-01 | .456856E-01 |
| 2 | .400000E+00 | -.720000E+00 | .600000E+00 | -.316800E+00 | .777601E-01 | .725760E-01 | -.146189E+00 | .167962E+00 | -.160123E+00 | .138400E+00 |
| 3 | .200000E+00 | -.600000E+00 | .876000E+00 | -.864000E+00 | .652320E+00 | -.378432E+00 | .132192E+00 | .485222E-01 | -.159564E+00 | .212975E+00 |
| 4 | .100000E+00 | -.420000E+00 | .870000E+00 | -.121680E+01 | .131544E+01 | -.117418E+01 | .884132E+00 | -.545876E+00 | .233187E+00 | .144445E-01 |
| 5 | .500000E-01 | -.270000E+00 | .723000E+00 | -.130320E+01 | .180468E+01 | -.206453E+01 | .203304E+01 | -.175800E+01 | .133516E+01 | -.863827E+00 |
| 6 | .250000E-01 | -.165000E+00 | .541500E+00 | -.119340E+01 | .200934E+01 | -.277927E+01 | .330344E+01 | -.347098E+01 | .327756E+01 | -.279900E+01 |
| 7 | .125000E-01 | -.975000E-01 | .378750E+00 | -.986400E+00 | .195453E+01 | -.316516E+01 | .438460E+01 | -.535728E+01 | .589444E+01 | -.591943E+01 |
| 8 | .625000E-02 | -.562500E-01 | .252375E+00 | -.758250E+00 | .172814E+01 | -.320582E+01 | .506534E+01 | -.703322E+01 | .877434E+01 | -.999265E+01 |
| 9 | .312500E-02 | -.318750E-01 | .162188E+00 | -.552150E+00 | .142283E+01 | -.297505E+01 | .527945E+01 | -.820388E+01 | .114195E+02 | -.144803E+02 |
| 0 | .156250E-02 | -.178125E-01 | .101344E+00 | -.385538E+00 | .110838E+01 | -.257941E+01 | .507988E+01 | -.873370E+01 | .134111E+02 | -.187127E+02 |
| 1 | .781250E-03 | -.984375E-02 | .619219E-01 | -.260325E+00 | .826048E+00 | -.211785E+01 | .458447E+01 | -.864150E+01 | .145106E+02 | -.220860E+02 |
| 2 | .390625E-03 | -.539063E-02 | .371484E-01 | -.171028E+00 | .593739E+00 | -.166298E+01 | .392538E+01 | -.805132E+01 | .146785E+02 | -.242033E+02 |
| 3 | .195313E-03 | -.292969E-02 | .219492E-01 | -.109828E+00 | .414075E+00 | -.125806E+01 | .321642E+01 | -.713312E+01 | .140345E+02 | -.249259E+02 |
| 4 | .976563E-04 | -.158203E-02 | .128027E-01 | -.691805E-01 | .281494E+00 | -.922148E+00 | .253891E+01 | -.605484E+01 | .127901E+02 | -.243474E+02 |
| 5 | .488281E-04 | -.849609E-03 | .738574E-02 | -.428625E-01 | .187219E+00 | -.657853E+00 | .194081E+01 | -.495358E+01 | .111837E+02 | -.227209E+02 |
| 6 | .244141E-04 | -.454102E-03 | .422022E-02 | -.261791E-01 | .122176E+00 | -.458398E+00 | .144280E+01 | -.392472E+01 | .943273E+01 | -.203752E+02 |
| 7 | .122070E-04 | -.241699E-03 | .239136E-02 | -.157904E-01 | .784158E-01 | -.312901E+00 | .104666E+01 | -.302319E+01 | .770770E+01 | -.176420E+02 |
| 8 | .610352E-05 | -.128174E-03 | .134509E-02 | -.941968E-02 | .495968E-01 | -.209733E+00 | .743041E+00 | -.227142E+01 | .612366E+01 | -.148075E+02 |
| 9 | .305176E-05 | -.677490E-04 | .751648E-03 | -.556436E-02 | .309629E-01 | -.138323E+00 | .517434E+00 | -.166908E+01 | .474471E+01 | -.120877E+02 |
| 0 | .152588E-05 | -.357056E-04 | .417572E-03 | -.325822E-02 | .191057E-01 | -.899140E-01 | .354163E+00 | -.120227E+01 | .359444E+01 | -.962392E+01 |
| 1 | .762939E-06 | -.187683E-04 | .230759E-03 | -.189284E-02 | .116660E-01 | -.576883E-01 | .238669E+00 | -.850585E+00 | .266825E+01 | -.749124E+01 |
| 2 | .381470E-06 | -.984192E-05 | .126915E-03 | -.109179E-02 | .705594E-02 | -.365775E-01 | .158587E+00 | -.592045E+00 | .194453E+01 | -.571281E+01 |
| 3 | .190735E-06 | -.514984E-05 | .695000E-04 | -.625672E-03 | .423091E-02 | -.229441E-01 | .104033E+00 | -.406019E+00 | .139349E+01 | -.427586E+01 |
| 4 | .953674E-07 | -.268936E-05 | .379086E-04 | -.356431E-03 | .251701E-02 | -.142515E-01 | .674508E-01 | -.274690E+00 | .983364E+00 | -.314600E+01 |
| 5 | .476837E-07 | -.140190E-05 | .206022E-04 | -.201949E-03 | .148661E-02 | -.877283E-02 | .432646E-01 | -.183539E+00 | .684213E+00 | -.227853E+01 |
| 6 | .238419E-07 | -.729561E-06 | .111594E-04 | -.113851E-03 | .872199E-03 | -.535572E-02 | .274776E-01 | -.121235E+00 | .469909E+00 | -.162648E+01 |
| 7 | .119209E-07 | -.379086E-06 | .602603E-05 | -.638890E-04 | .508588E-03 | -.324467E-02 | .172923E-01 | -.792364E-01 | .318867E+00 | -.114553E+01 |
| 8 | .596046E-08 | -.196695E-06 | .324476E-05 | -.356991E-04 | .294880E-03 | -.195184E-02 | .107907E-01 | -.512803E-01 | .213973E+00 | -.796809E+00 |
| 9 | .298023E-08 | -.101924E-06 | .174254E-05 | -.198685E-04 | .170071E-03 | -.116643E-02 | .668074E-02 | -.328858E-01 | .142102E+00 | -.547858E+00 |
| 0 | .149012E-08 | -.527501E-07 | .933498E-06 | -.110171E-04 | .976063E-04 | -.692798E-03 | .410598E-02 | -.209107E-01 | .934631E-01 | -.372637E+00 |

Fig. 5.41a.

| | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -.403108E-02 | .241865E-02 | -.145119E-02 | .870713E-03 | -.522428E-03 | .313457E-03 | -.188074E-03 | .112844E-03 | -.677067E-04 | .406240E-04 |
| 1 | -.314424E-01 | .212841E-01 | -.142217E-01 | .940371E-02 | -.616465E-02 | .401225E-02 | -.259542E-02 | .167010E-02 | -.106977E-02 | .682483E-03 |
| 2 | -.112467E+00 | .875551E-01 | -.660291E-01 | .485858E-01 | -.350549E-01 | .248885E-01 | -.174345E-01 | .120744E-01 | -.828053E-02 | .563049E-02 |
| 3 | -.225539E+00 | .212841E+00 | -.186986E+00 | .156293E+00 | -.125879E+00 | .984881E-01 | -.752767E-01 | .564335E-01 | -.416227E-01 | .302730E-01 |
| 4 | -.185329E+00 | .285279E+00 | -.328513E+00 | .331350E+00 | -.308637E+00 | .272190E+00 | -.230499E+00 | .189099E+00 | -.151201E+00 | .118344E+00 |
| 5 | .421299E+00 | -.545409E-01 | -.217116E+00 | .394498E+00 | -.490423E+00 | .522940E+00 | -.510671E+00 | .470102E+00 | -.414391E+00 | .353167E+00 |
| 6 | .214920E+01 | -.144318E+01 | .773711E+00 | -.201843E+00 | -.242455E+00 | .554070E+00 | -.744659E+00 | .835048E+00 | -.849255E+00 | .810454E+00 |
| 7 | .546596E+01 | -.464592E+01 | .360736E+01 | -.249745E+01 | .143780E+01 | -.512907E+00 | -.230807E+00 | .779406E+00 | -.114278E+01 | .134567E+01 |
| 8 | .105044E+02 | -.102654E+02 | .935669E+01 | -.794495E+01 | .623510E+01 | -.442886E+01 | .269578E+01 | -.115852E+01 | -.110099E+00 | .108173E+01 |
| 9 | .169382E+02 | -.184469E+02 | .188261E+02 | -.180752E+02 | .163461E+02 | -.138926E+02 | .110121E+02 | -.799528E+01 | .508967E+01 | -.247991E+01 |
| 0 | .240408E+02 | -.287294E+02 | .321848E+02 | -.339963E+02 | .339934E+02 | -.322462E+02 | .290216E+02 | -.247142E+02 | .197720E+02 | -.146300E+02 |
| 1 | .308858E+02 | -.401084E+02 | .487762E+02 | -.559193E+02 | .607472E+02 | -.627694E+02 | .618463E+02 | -.581714E+02 | .522031E+02 | -.445684E+02 |
| 2 | .365907E+02 | -.512744E+02 | .671853E+02 | -.829037E+02 | .968916E+02 | -.107744E+03 | .114400E+03 | -.116280E+03 | .113321E+03 | -.105938E+03 |
| 3 | .405119E+02 | -.609215E+02 | .855278E+02 | -.112924E+03 | .141071E+03 | -.167582E+03 | .190073E+03 | -.206504E+03 | .215446E+03 | -.216233E+03 |
| 4 | .423422E+02 | -.680196E+02 | .101852E+03 | -.143232E+03 | .190352E+03 | -.240324E+03 | .289505E+03 | -.333977E+03 | .370060E+03 | -.394787E+03 |
| 5 | .421078E+02 | -.719772E+02 | .114518E+03 | -.170882E+03 | .240675E+03 | -.321672E+03 | .409853E+03 | -.499752E+03 | .585074E+03 | -.659456E+03 |
| 6 | .400953E+02 | -.726781E+02 | .122459E+03 | -.193272E+03 | .287566E+03 | -.405578E+03 | .544775E+03 | -.699697E+03 | .862281E+03 | -.102262E+04 |
| 7 | .367454E+02 | -.704149E+02 | .125282E+03 | -.208543E+03 | .326890E+03 | -.485193E+03 | .685177E+03 | -.924387E+03 | .119568E+04 | -.148740E+04 |
| 8 | .325498E+02 | -.657610E+02 | .123222E+03 | -.215789E+03 | .355482E+03 | -.553953E+03 | .820518E+03 | -.116006E+04 | .157119E+04 | -.204512E+04 |
| 9 | .279698E+02 | -.594273E+02 | .116996E+03 | -.215059E+03 | .371513E+03 | -.606529E+03 | .940362E+03 | -.139040E+04 | .196785E+04 | -.267463E+04 |
| 0 | .233856E+02 | -.521359E+02 | .107608E+03 | -.207193E+03 | .374590E+03 | -.639472E+03 | .103582E+04 | -.159880E+04 | .236033E+04 | -.334387E+04 |
| 1 | .190747E+02 | -.445285E+02 | .961617E+02 | -.193576E+03 | .365598E+03 | -.651472E+03 | .110064E+04 | -.177053E+04 | .272212E+04 | -.401331E+04 |
| 2 | .152124E+02 | -.371141E+02 | .837078E+02 | -.175861E+03 | .346388E+03 | -.643248E+03 | .113171E+04 | -.189448E+04 | .302891E+04 | -.464064E+04 |
| 3 | .118856E+02 | -.302521E+02 | .711394E+02 | -.155727E+03 | .319388E+03 | -.617174E+03 | .112913E+04 | -.196423E+04 | .326134E+04 | -.518580E+04 |
| 4 | .911314E+01 | -.241596E+02 | .591411E+02 | -.134690E+03 | .287226E+03 | -.576739E+03 | .109576E+04 | -.197831E+04 | .340693E+04 | -.561546E+04 |
| 5 | .686749E+01 | -.189342E+02 | .481790E+02 | -.113995E+03 | .252417E+03 | -.525987E+03 | .103650E+04 | -.193978E+04 | .346083E+04 | -.590630E+04 |
| 6 | .509319E+01 | -.145833E+02 | .385197E+02 | -.945628E+02 | .217144E+03 | -.469005E+03 | .957447E+03 | -.185531E+04 | .342553E+04 | -.604672E+04 |
| 7 | .372186E+01 | -.110527E+02 | .302665E+02 | -.769972E+02 | .183139E+03 | -.409530E+03 | .865143E+03 | -.173397E+04 | .330974E+04 | -.603687E+04 |
| 8 | .268267E+01 | -.825252E+01 | .234006E+02 | -.616189E+02 | .151640E+03 | -.350691E+03 | .765845E+03 | -.158604E+04 | .312669E+04 | -.588737E+04 |
| 9 | .190909E+01 | -.607652E+01 | .178219E+02 | -.485228E+02 | .123419E+03 | -.294889E+03 | .665063E+03 | -.142181E+04 | .289224E+04 | -.561704E+04 |
| 0 | .134249E+01 | -.441648E+01 | .133838E+02 | -.376383E+02 | .988495E+02 | -.243780E+03 | .567266E+03 | -.125078E+04 | .262313E+04 | -.525007E+04 |

Fig. 5.41b.



Scanned with OKEN Scanner

# ANEXĂ

## Descrierea algoritmilor în pseudocod

Varianta de *pseudocod*, în care sînt descrişi algoritmii prezentaţi în această lucrare, este caracterizată printr-un înalt grad de flexibilitate. Acesta este datorat faptului că în descrierea algoritmilor se pot utiliza atît elemente *standard (primitive)*, cu semnificaţie şi reprezentare predefinită, cît şi *elemente nestandard (neprimitive)*, a căror reprezentare şi semnificaţie sînt stabilite de către utilizator, în funcţie de natura datelor şi prelucrărilor specifice algoritmilor descrişi.

Elementele standard de bază din *pseudocod* sînt următoarele:

a) *cuvinte-cheie*:

| | | |
|---|---|---|
| **alege** | **dacă** | **pentru** |
| **algoritm** | **dintre** | **pînă [cînd]** |
| **altfel** | **este** | **procedura** |
| **atribuie** | **execută** | **repetă** |
| **atunci** | **funcţia** | **rest** |
| **cît timp** | **ori** | **sfîrşit** |

b) *delimitatori*:

( ) * ** / '

c) *separatori*:

& : ; ,

d) *operatori standard* (primitivi):

— aritmetici: · / (înmulţire, împărţire); + — (adunare, scădere)

— relaţionali: $= \ \neq \ < \ \leqslant \ > \ \geqslant$

— logici:
- negaţie: *non* *not* $\neg$
- conjuncţie: *şi* $\wedge$
- disjuncţie: *sau* $\vee$

— de atribuire: $\leftarrow$

e) *constante standard*:

— numerice uzuale (întregi, reale)

— logice (**adevărat**, **fals**)

— alfanumerice ('*şir de caractere*')



Scanned with OKEN Scanner

Din categoria elementelor nestandard de bază fac parte *identificatorii, variabilele, constantele nestandard* și *operatorii nestandard.*

*Pseudocodul* nu impune nici un mecanism de descriere a datelor, lăsînd utilizatorului deplină libertate în stabilirea tipului și a modului de reprezentare a acestora. Astfel, tipul unei anumite date sau structuri de date poate fi unul dintre cele standard (întreg, real, logic, alfanumeric) sau poate fi un tip nestandard, ale cărui caracteristici sînt stabilite de către utilizator. Este deosebit de important ca utilizatorul să aleagă pentru elementele nestandard introduse în descrierea unui algoritm reprezentări cît mai sugestive, a căror utilizare să nu genereze ambiguități. Pentru a conferi mai multă claritate descrierii algoritmilor în *pseudocod* se recomandă inserarea unor *comentarii*, care să furnizeze informații cu privire la semnificația elementelor nestandard utilizate și a prelucrărilor efectuate asupra datelor. Un comentariu se reprezintă în *pseudocod* astfel :

/* *text* */

Elementele de bază din *pseudocod* se utilizează pentru a construi expresii, enunțuri standard și enunțuri nestandard.

În componența *expresiilor pseudocod* pot intra operatori, variabile, constante, paranteze și virgule. Fiecare *operator* reprezintă simbolic o operație ce se efectuează asupra unuia sau mai multor *operanzi* și determină obținerea unei valori *rezultat.* Numărul operanzilor, tipul acestora și tipul rezultatului sînt predefinite în cazul operatorilor standard. În funcție de poziția relativă pe care o ocupă față de operanzii asupra cărora se aplică, operatorii nestandard sînt de două tipuri :

**a)** *Prefixați* — operatorii din această categorie preced operanzii și se utilizează pentru a construi *expresii prefixate* de forma

⟨*identificator operator*⟩ (⟨*listă operanzi*⟩)

unde ⟨*listă operanzi*⟩ include unul sau mai mulți operanzi, reprezentați prin expresii separate prin virgule.

Din acest punct de vedere funcțiile sînt tratate ca operatori prefixați, iar apelurile de funcții ca expresii prefixate.

**b)** *Infixați* — operatorii de acest tip au întotdeauna doi operanzi și se plasează între aceștia ; se construiesc astfel *expresii infixate* cu structura

$\langle operand\rangle_1$ ⟨*identificator operator*⟩ $\langle operand\rangle_2$

unde $\langle operand\rangle_i$, $i = 1, 2$, poate fi constantă, variabilă, expresie prefixată, subexpresie (expresie delimitată de paranteze) sau expresie infixată cu operator de prioritate mai mică sau eventual egală cu cea a celui specificat de ⟨*identificator operator*⟩.

*Prioritățile* operatorilor standard sînt cele uzuale :

$$p(\cdot) = p(/) > p(+) = p(-) > p(\text{op. rel}) > p(\neg) > p(\wedge) > p(\vee),$$

în timp ce prioritățile operatorilor nestandard infixați, atît unii față de alții, cît și față de operatorii standard, sînt stabilite de către utilizator. Pentru a evita ambiguitățile ce pot apărea atunci cînd se utilizează operatori nestandard infixați se recomandă introducerea parantezelor pentru delimitarea operanzilor.

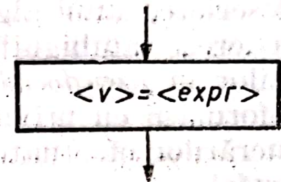
În *pseudocod* descrierea prelucrărilor efectuate asupra datelor se realizează prin intermediul enunţurilor standard şi (sau) nestandard.

*Enunţurile standard* încep întotdeauna cu un cuvînt-cheie, care specifică tipul prelucrării descrise şi se termină cu delimitatorul ;.

În cele ce urmează, pentru fiecare enunţ standard în parte, sînt prezentate denumirea, structura, semnificaţia şi schema logică (organigrama) echivalentă. Secvenţele de enunţuri standard şi (sau) nestandard sînt notate $\langle secv \rangle$.

**1.** *Atribuire*

**atribuie** $\langle v \rangle \leftarrow \langle expr \rangle$ ;



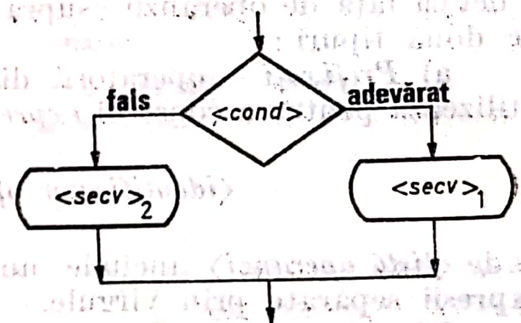

unde $\langle v \rangle$ este o variabilă căreia i se asociază (atribuie) valoarea expresiei $\langle expr \rangle$. Tipurile variabilei şi expresiei trebuie să fie compatibile.

Secvenţele de atribuiri se reprezintă sub forma

**atribuie** $\langle v_1 \rangle \leftarrow \langle expr \rangle_1$
& $\langle v \rangle_2 \leftarrow \langle expr \rangle_2$
. . . . . . . .
& $\langle v \rangle_n \leftarrow \langle expr \rangle_n$
;

**2.** *Decizie*

**dacă** $\langle cond \rangle$
**atunci** $\langle secv \rangle_1$
**altfel** $\langle secv \rangle_2$
;




unde $\langle cond \rangle$ este o expresie de tip logic.

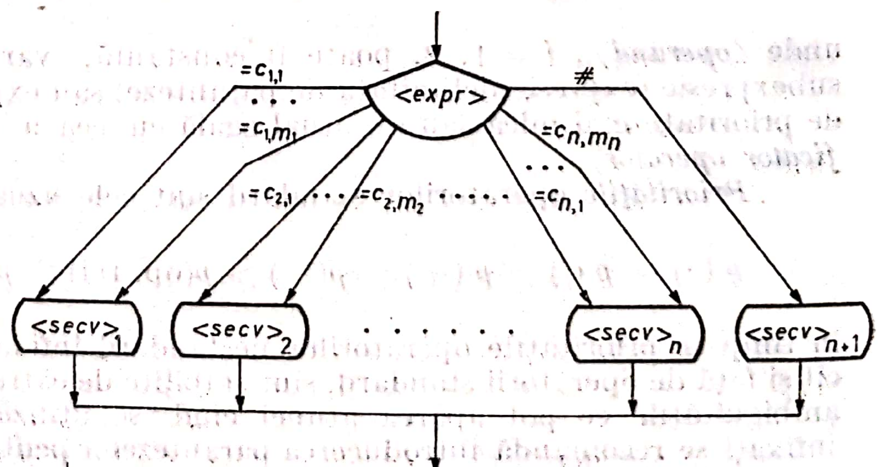
Decizia poate avea şi forma particulară

**dacă** $\langle cond \rangle$ **atunci** $\langle secv \rangle_1$ ;

care corespunde cazului în care $\langle secv \rangle_2$ este vidă.

**3.** *Selecţie*

**alege** $\langle expr \rangle$ **dintre**
$c_{1,1}, \ldots, c_{1,m_1}$ : $\langle secv \rangle_1$
$c_{2,1}, \ldots\ c_{2,m_2}$ : $\langle secv \rangle_2$
. . . . . . . . .
$c_{n,1}, \ldots, c_{n,m_n}$ : $\langle secv \rangle_n$
[**rest** : $\langle secv \rangle_{n+1}$]
;



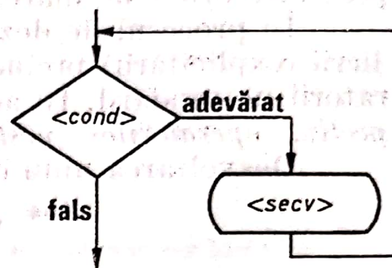
unde $c_{i,j}$, $j = 1, \ldots, m_i$, $i = 1, \ldots, n$ sînt constante de același tip cu expresia ⟨*expr*⟩.

Selecția poate să nu conțină alternativa **rest**.

Se observă că în situațiile în care nu există nici o constantă $c_{i,j}$ = ⟨*expr*⟩, dacă există alternativa **rest**, atunci se execută secvența de prelucrări descrisă de $\langle secv \rangle_{n+1}$, iar dacă această alternativă lipsește, nu se execută nici o prelucrare.

4. *Ciclu cu test inițial*

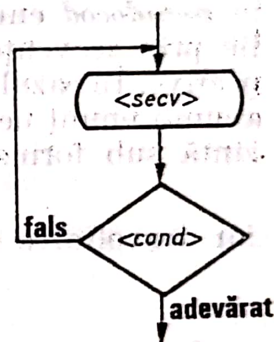
**cît timp** ⟨*cond*⟩ **repetă**
| ⟨*secv*⟩
;




Secvența de enunțuri ⟨*secv*⟩ se execută de $n$ ori, $n \geqslant 0$.

5. *Ciclu cu test final*

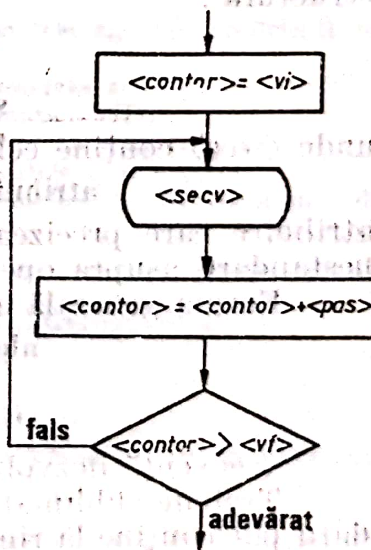
**repetă**
| ⟨*secv*⟩
**pînă [cînd]** ⟨*cond*⟩ ;




În cazul acestui tip de ciclu prelucrările descrise de ⟨*secv*⟩ se execută de $n$ ori, $n \geqslant 1$.

6. *Ciclu cu contor*

**pentru** ⟨*contor*⟩ = ⟨*vi*⟩, ⟨*vf*⟩, ⟨*pas*⟩ **repetă**
⟨*secv*⟩
;




unde ⟨*vi*⟩, ⟨*vf*⟩ — valoarea inițială și, respectiv, finală a variabilei ⟨*contor*⟩, iar ⟨*pas*⟩ — cantitatea cu care se modifică valoarea variabilei ⟨*contor*⟩ după fiecare execuție a prelucrărilor descrise de secvența de enunțuri ⟨*secv*⟩.



Scanned with OKEN Scanner

Valoarea inițială, valoarea finală și pasul de creștere a contorului pot fi orice expresii cu valori întregi, cu observația că valoarea pasului trebuie să fie strict pozitivă.

Pentru mai multă flexibilitate, în această variantă de *pseudocod* prelucrările din categoria citire date și tipărire rezultate nu sînt descrise prin enunțuri standard, ci prin enunțuri nestandard.

*Enunțurile nestandard* se reprezintă sub forma * ⟨identificator enunț⟩; unde ⟨identificator enunț⟩ poate fi orice text, care descrie o prelucrare de complexitate oricît de mare.

În procesul de dezvoltare în etape a algoritmilor apare necesitatea detalierii (explicitării) prelucrărilor descrise de enunțurile nestandard și (sau) operatorii nestandard. În acest scop se utilizează *dezvoltări ale enunțurilor și, respectiv, operatorilor nestandard.*

Dezvoltarea unui enunț nestandard se reprezintă astfel :

** ⟨identificator enunț⟩ **este**
  ⟨secv⟩
**sfîrșit**

În faza de codificare într-un limbaj de programare a unui algoritm descris în *pseudocod* enunțurile nestandard se codifică fie prin apeluri de proceduri, fie prin secvențe de instrucțiuni corespunzătoare dezvoltării enunțurilor respective. În cazul în care utilizatorul dorește să pună în evidență faptul că un anumit enunț nestandard se implementează printr-o procedură, acesta se reprezintă sub forma

**execută** ⟨identificator procedură⟩;

iar dezvoltarea sa are structura

**procedura** ⟨identificator procedură⟩ **este**
  ⟨*secv*⟩
**sfîrșit**

*Dezvoltarea unui operator nestandard*, operator care se aplică asupra unuia sau mai multor operanzi în scopul obținerii unei valori rezultat, are următoarea structură :

**funcția** ⟨identificator operator⟩ **este**
  ⟨*secv*⟩
**sfîrșit**

unde ⟨*secv*⟩ conține cel puțin o atribuire de forma

**atribuie** ⟨identificator operator⟩ ← ⟨*expr*⟩;

atribuire care precizează valoarea rezultată în urma aplicării operatorului nestandard asupra operanzilor săi.

Forma generală a descrierii *pseudocod* a unui algoritm este următoarea :

**algoritm** ⟨identificator algoritm⟩ **este**
  ⟨*secv*⟩
**sfîrșit**

⟨secvență dezvoltări enunțuri și (sau) operatori nestandard⟩

Trebuie subliniat faptul că dezvoltările enunțurilor (operatorilor) nestandard pot conține la rîndul lor enunțuri și (sau) operatori nestandard.

Dezvoltările unor enunțuri și (sau) operatori nestandard pot lipsi din descrierea unui algoritm, dacă identificatorii acestora sînt suficient de expliciți pentru a permite codificarea comodă în limbajul în care se implementează algoritmul.



Scanned with OKEN Scanner

# Notații utilizate

| | |
|---|---|
| $A$ | — inel |
| $U_A$ | — mulțimea unităților inelului $A$ |
| $M_n(A)$ | — inelul matricelor de ordinul $n$, cu elemente din inelul $A$ |
| $n\mathbb{Z}$ | — subinelul $\{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ al lui $\mathbb{Z}$ |
| $I$ | — ideal |
| $Aa = (a)$ | — idealul generat de elementul $a$ |
| $\equiv, \sim$ | — relații de echivalență |
| $[x]$ | — clasa de echivalență a elementului $x$ |
| $A/I$ | — inelul factor al inelului $A$ prin idealul $I$ |
| $M/\sim$ | — mulțimea factor |
| $f(A)$ | — imaginea inelului $A$ prin morfismul $f$ |
| $Ker\ f$ | — nucleul morfismului $f$ |
| $\prod_{i \in I} A_i$ | — inelul produs al familiei de inele $(A_i)_{i \in I}$ |
| $[x, y] =$ c.m.m.m.c. | — cel mai mic multiplu comun al lui $x$ și $y$ |
| $(x, y) =$ c.m.m.d.c. | — cel mai mare divizor comun al lui $x$ și $y$ |
| c.m.m.d.c.d. | — cel mai mare divizor comun la dreapta |
| c.m.m.d.c.s. | — cel mai mare divizor comun la stînga |
| $x \sim y$ | — elementul $x$ este asociat cu $y$ |
| $K$ | — corp comutativ |
| $\overline{K}$ | — închiderea algebrică a corpului $K$ |
| $A^M$ | — mulțimea funcțiilor $f$, $f: M \to A$ |
| $A[[z_i]]_{i \in I}$ | — inelul seriilor formale în nedeterminatele $z_i$, cu coeficienții din inelul $A$ |
| $A[z_i]_{i \in I}$ | — inelul polinoamelor în nedeterminatele $z_i$, cu coeficienți din inelul $A$ |
| $A[[z]]$ | — inelul seriilor formale în nedeterminata $z$ |
| $A[z]$ | — inelul polinoamelor în nedeterminata $z$ (1D) |
| $A[[z_1, z_2]]$ | — inelul seriilor formale în nedeterminatele $z_1$ și $z_2$ |
| $A[z_1, z_2]$ | — inelul polinoamelor în nedeterminatele $z_1$ și $z_2$ (2D) |
| $A[z_1][z_2]$ | — inelul polinoamelor în nedeterminatele $z_2$, cu coeficienți din inelul $A[z_1]$ |
| $a \overset{\Delta}{=} b$ | — $a$ este prin definiție $b$ |
| $\delta(f)$ | — gradul polinomului $f$ |
| $\delta_{z_i}(f)$ | — gradul polinomului $f$, în raport cu nedeterminata $z_i$ |
| $r(f, g)$ | — rezultantul polinoamelor $f$ și $g$ |
| $c_f$ | — conținutul polinomului $f$ |
| $f = c_f f^*$ | — factorizarea primitivă a polinomului $f$ |
| $K(z)$ $(K(z_1, z_2))$ | — corpul fracțiilor raționale în nedeterminata $z$ (în nedeterminatele $z_1, z_2$), cu coeficienți din corpul $K$ |
| $K^{pr}(z)$ | — inelul fracțiilor raționale proprii |
| $K(z_1)[z_2]$ | — inelul polinoamelor în nedeterminarea $z_2$, cu coeficienți din corpul $K(z_1)$ |
| $\langle X \rangle$ | — submodulul generat de mulțimea $X$ |
| Supp $(f)$ | — suportul funcției $f$ |
| $A^{(I)}$ | — mulțimea funcțiilor din $A^I$ de suport finit |
| $M_{n \times m}(A)$ sau $A^{n \times m}$ | — mulțimea matricelor de tipul $n \times m$ peste inelul $A$ |



Scanned with OKEN Scanner

| | |
|---|---|
| $\lvert F \rvert$ sau det $F$ | — determinantul matricei $F$ |
| $GL_n(A)$ | — grupul linear de ordinul $n$ al inelului $A$ |
| $E_{ij}(a)$, $P_{ij}$, $E_i(a)$ | — matrice elementare de tipul I, II, III |
| $F \sim G$ | — matricele $F$ și $G$ sînt echivalente |
| $d_k(F)$ | — c.m.m.d.c. al minorilor se ordin $k$ ai matricei $F$ |
| $K(M)$ | — extinderea corpului $K$ prin adjuncționarea elementelor mulțimii $M$ |
| $F = \bar{F}F^*$ | — factorizarea primitivă la stînga a matricei $F$ |
| diag $\{d_i\}$ | — matricea diagonală cu elementele $d_i$ pe diagonală |
| $U^*(z_1, z_2) = \mathfrak{Z}[u_{m,n}]$ | — transformata $z$ 2D standard |
| $U^{**}(z_1, z_2)$ | — transformata $z$ 2D nestandard |
| $\{\delta_{m,n}\}$ | — impuls Dirac 2D |
| $\{h_{m,n}\}$ | — șirul pondere |
| $*$ | — produs de convoluție |
| $\{u_{ij}\}$ | — șir (secvență) 2D de intrare |
| $\{y_{ij}\}$ | — șir (secvență) 2D de ieșire |
| $x^0(i, j)$ | — stări orizontale |
| $x^v(i, j)$ | — stări verticale |
| $\Sigma = (A, B, C, D)$ | — realizare 2D a matricei de transfer $F(z_1, z_2)$ |
| $\Sigma A = (AA, AB, AC, AD)$ | — realizare 1D a matricei de transfer $A(z_2)$ ($AA$, $AB$, $AC$, $AD$ sînt matrice) |
| $X_i(z_2)$ | — transformata 1D în $z_2$ a șirului $x_{ij}$ |
| $A^{i,j}$ | — matricea de tranziție a sistemului 2D |
| $C_m$ | — matricea caracteristică a sistemului |
| model de stare $R$ | — model de stare Roesser |
| model de stare $F/M$ | — model de stare Fornasini—Marchesini |
| rang $M$ | — rangul matricei $M$ |
| tr $M$ | — urma matricei $M$ |
| $\mathcal{C}$ | — matricea de controlabilitate |
| $\mathcal{O}$ | — matricea de observabilitate |
| $R_s$ | — inelul funcțiilor de transfer stabile |
| $M, N$ | — dimensiunile unei secvențe 2D |
| $\{u_k^*\} = \mathfrak{P}^*\{u_{m,n}\}$ | — proiecție 1D a unei secvențe 2D, unde * indică tipul proiecției ($v$ — verticală, $o$ — orizontală, $b$ — bidirecțională, $s$ — standard) |
| $NT$ | — dimensiunea proiecției bidirecționale a unei secvențe 2D |
| $NR$ | — numărul valorilor nesemnificative dintr-o proiecție bidirecțională |
| $S_{M,N}$ | — mulțimea indicilor valorilor semnificative dintr-o proiecție bidirecțională |
| $R_{M,N}$ | — mulțimea indicilor valorilor nesemnificative dintr-o proiecție bidirecțională |
| $\mathfrak{B}^*\{u_k^*\}$ | — proiecție bidimensională (2D) de tip * (verticală, orizontală sau bidirecțională) a unei secvențe 1D |
| $\{a_{i,j}, i = 0, \ldots, Ma, j = 0, \ldots, Na\}, \{b_{i,j}\ i=0, \ldots, Mb, j=0, \ldots, Nb\}$ | — coeficienții modelului matematic (funcție de transfer sau relație de recurență) al unui sistem 2D |
| $\{a_g^\#\}, \{b_g^\#\}$ | — coeficienții proiecției bidirecționale a modelului unui sistem 2D |
| *m.s.r.* | — model de simulare de tip rețea |
| *e.s.* | — experiment de simulare |

*variabilele* sînt identificate prin nume simbolice formate dintr-o literă, urmată eventual de una sau mai multe litere și (sau) cifre

în reprezentarea *valorilor constantelor* pentru separarea părții întregi de cea subunitară se utilizează *punctul zecimal*, la fel ca în limbajele de programare.

*operatorul de înmulțire* (notat $\cdot$) este omis acolo unde se consideră că nu apar ambiguități.



Scanned with OKEN Scanner

01007675

# Bibliografie


1. Ion, I., Radu, N., *Algebra*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
2. Morf, M., Lévy, B., Kung, S. Y., *New Results in 2-D Systems Theory, part I: 2-D Polynomial Matrices. Factorization and Coprimeness*, „Proc. IEEE", vol. 65, No 6, p. 861 — 872 June, 1977.
3. Bose, N. K., *An algorithm for GCF Extraction from Two Multivariable Polynomials*, „Proc. IEEE", vol. 64, no. 1, p. 185 — 186, Jan., 1976.
4. Bose, N. K., *Problems and Progress in Multidimensional Systems Theory*, „Proc. IEEE", vol. 65, no. 6, p. 824 — 840, June, 1977.
5. Rajan, O., Swany I., *Symmetry Constraints on Two-Dimensional Half Plane Digital Transfer Functions*, „IEEE Trans. on Ac. Sp. Sig.," 5/Oct/79.
6. Shanks, J., L., Treitel, S., Justice, J. H., *Stability and Synthesis of Two-Dimensional Recursive Filters*, „IEEE Trans. on Audio and Electroac.," vol. AU-20, no. 2, p.115 — 128, June, 1972.
7. Goodman, D., *Some Stability Properties of Two-dimensional Schift Invariant Digital Filters*, „IEEE Trans. Circ. Syst." vol. CAS-24, p.201 — 208, Apr., 1977.
8. Powell, S. R., Silverman, L. M., *Modelling of Two-Dimensional Covariance Functions with Applications to Image Restoration*, „IEEE Trans. on Aut. Contr.", vol. AG-19, p. 8 — 13, Feb., 1974.
9. Jury, E. I., *Stability of Multidimensional Scalar and Matrix Polynomials*, „Proc. IEEE", vol. 66, no. 9, p. 1018—1047 sept., 1978.
10. Huang, T. S., *Stability of Two-Dimensional Recursive Filters*, „IEEE Trans. on Audio-Electroac.", vol. AU-20, no. 2., p. 158 — 163 June, 1972.
11. Murray, J., *Another Proof and a Sharpenning of Huang's Theorem*, „IEEE Trans. on Ac. Sp. Sig.", vol ASSP-25, no. 6, p.581 — 582, Dec., 1977.
12. O'Connor, P., Huang, T. S. *Stability of General Two-Dimensional Recursive Digital Filters*, „IEEE Trans., on Ac. Sp. Sig.", 6/Dec/1978.
13. Šiljak, D. D., *Stability Criteria for Two-Dimensional Polynomials*, „IEEE Trans. Circ. Syst.", vol. CAS-22, p. 183 — 189, Mar., 1975.
14. Bose, N. K., Basu, S., *Tests for Polynomial Zeros on a Polydisc Distinguished Boundary*, „IEEE Trans. on Circ. Syst.", vol. CAS-25, no. 9, p. 684—693, Sept., 1978.
15. Kung, S. Y., Lévy, B., Morf, M., Kailath, T., *New Results in 2-D Systems Theory, Part II: 2-D State Space Models — Realization and the Notions of Controllability, Observability and Minimality*, „Proc. IEEE", vol. 65, no. 6, p. 945 — 961, June, 1977.
16. Eising, R. *Low Order Realization for 2-D Transfer Functions*, „Proc. IEEE", vol. 67, no. 5, p. 866 — 868, May, 1977.
17. Attassi, S., *Systemes linéaires homogènes a deux indices*, Rapport IRIA Laboria 31/1973.
18. Roesser, R. P., *A discrete State-Space Model for Linear Image Processing*, „IEEE Trans. on Aut. Contr.", vol AC-20, p. 1 — 10, Feb., 1975.
19. Fornasini, E., Marchesini, G., *Internal Stability of Two-Dimensional Filters*, „IEEE Trans. on Aut. Contr.", vol AC-24, p. 129 — 130, Feb., 1979.
20. Fornasini, E., Marchesini, G., *State Space Realization Theory of Two-Dimensional Filters*, „IEEE Trans. on Aut. Contr"., vol AC-21, p. 484 — 492, Aug., 1976
21. Prepeliţă, V., *Systèmes linéaires à N indices*, „Comptes rendus Acad. Sc. Paris", t. 279, p. 387 — 390, sept., 1974.
22. Prepeliţă, V., *Applications entrée-sortie à plusieurs indices*, „Rev. Française d'Aut., Inf. et Rech. Op.", vol. 10, no. 11, p. 55 — 73, nov., 1976.
23. Prepeliţă, V., *Réalisation minimales des systèmes linéaires à plusieurs indices*, „Rev. Roum. Sci. Techn. — Electro.—Energ.", **23**, **4**, p. 615 — 622, 1978.
24. Prepeliţă, V., *A Dynamical system described by Partial Differential Equations*, „Rev. Roum. Sci. Techn. Electro-Energ.", **24**, **1**, p. 117 — 126, 1979.
25. Prepeliţă, V., *A State Space Model for 2-D Systems*, „Rev. Roum. match. pures appl.", **29**, **10**, p. 889—893, 1984.
26. Koo, C. S., Chen, C. T., *Fadeeva's Algorithm for Spatial Dynamical Equations*, „Proc. IEEE", p. 975 — 976, June, 1977.
27. Jury, E. I., Kolavennu, V. R., Anderson B.D.O., *Stabilizations of Certain Two-Dimensional Recursive Digital Filters*, „Proc. IEEE", vol. 65, p. 887 — 892, June, 1977.
28. Sontag, E. D., *Linear Systems over Commutative Rings*, Ricerche di Automatica", vol. 7, p. 1 — 34, July, 1976.
29. Eising, R., *Realization and Stabilization of 2-D Systems*, „IEEE Trans. on Aut. Contr.", vol. AC-23, p. 793 — 799, Oct., 1978.
30. Ahmed, A. R. E., *On the Stability of Two-Dimensional Discrete Systems*, „IEEE Trans. on Aut. Contr.", vol AC-25, no. 3, p. 551 — 552, June, 1980.
31. Boland, F. M., Owens, D. H. *Linear Multipass Processes: A Two Dimensional Interpretation*, „Proc. IEEE", vol. 127, no 5, p. 189 — 193, 1980.
32. Droaşcă, B., Necula, M. A., Kalisz, E., Stănescu, D. *Sisteme discrete bidimensionale. Formularea algebrică, analiza stabilităţii*, AMC 35, Ed. Tehnică, p. 222 — 235, 1983.




Scanned with OKEN Scanner

5745 40 C 01007675

33. Kurek, J. E., *Stabilities of 2-D Linear Discrete-Time Systems*, Congresul IFAC, Budapesta, 1984.
34. Agathoklis, P., Jury, E. I., Mansour M., *Asymptotic Stability and the Lyapunov Equations for Two-Dimensional Discrete Systems*, Congresul IFAC, Budapesta, 1984.
35. Droaşcă, B., Necula, M.A., Stănescu, D., *New Results in the 2-D Systems Synthesis*, Digital Techniques in Simulation, Communication and Control, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), p. 161 — 169, IMACS 1985.
36. Mertzios, B. G., *Decoupling of 2-D Systems by Dynamic State Feedback Controllers*, Congresul IFAC p. 144 — 149, Budapesta, 1984.
37. Paraskevopoulos, P. N., *Characteristic Polynomial Assignment and Determination of the Residual Polynomial in 2-D Systems*, „IEEE Trans. on Aut. Control", vol. 26, no 2, p. 541—543 Apr., 1981.
38. Stavroulakis, P., Paraskevopoulos, P. N., *Reduced-order Feedback Law Implementation for 2-D Digital Systems*, „Int. J. System. Sci.", **12**, p. 525 — 537, 1981.
39. Hinamoto, T., Fairman, F. W., Shimoniski, J., *Stabilization of 2-D Filters using 2-D Observers*, „Int. J. System Sci.", **13**, p. 177 — 191, 1982.
40. Kawaji, S., *Minimal order State Observer for Two-Dimensional Systems*, Congresul IFAC, p. 153 —, 159, Budapesta, 1984.
41. Rao, C. R., Mitra, S. K., *Generalised Inverse of Matrices and its Applications*, Willey, New-York 1971.
42. Chakrabarti, S., Mitra, S. K., *Design of Two-Dimensional Digital Filters via Spectral Transformations*, „Proc. IEEE", vol. 65, no. 6, p. 905 — 914, June, 1977.
43. Wolovich, W. A., *Linear Multivariable Systems*, N. Y. Springer Verlag, 1974.
44. Paraskevopoulos, P. N., *Exact Model-Matching of 2-D Systems via State Feedback*, J. Franklin Institute", vol. 308, p. 475 — 486, 1979.
45. Yasuda, Y., *On the Synthesis of Model-following Two-Dimensional Systems*, „Int. J. Control". vol. 34, p. 321 — 325, 1981.
46. Šebek, M., *Model-matching of 2-D multi-input multi-output Systems*, Congresul IFAC, p. 148 — 152, Budapesta, 1984.
47. Paraskevopoulos, P. N., *Transfer Function Matrix Synthesis of two-dimensional Systems*, „IEEE Trans. on Aut. Control", vol AC-25, no. 2, p. 321 — 324, April, 1980.
48. Justice, J. H., *A Levinson-Type Algorithm for Two-Dimensional Wiener Filtering using Bivariate Szegö Polynomials*, „Proc. IEEE", vol. 65, no. 6, p. 882 — 886, June, 1977.
49. Abramatic, I., Germain, G., *Design of Two-Dimensional Separable Denominator Recursive Filters*, „IEEE Trans. on Ac. Sp. Sig.", **5**, Oct. 1979.
50. Maria, G. A., Fahmy, M. M., *An lp-Design Technique for Two-Dimensional Digital Recursive Filters*, „IEEE Trans. on Ac. Sp. Sig.", vol ASSP-22, p. 15 — 21, Feb., 1974.
51. Thyagarajan, K. S., *Frequency Transformations for Two-Dimensional Recursive Filters*, „Proc. IEEE", no 6, June, 1980.
52. Mersereau, R. M., *Mc Clean Transformations for Two-Dimensional Digital Filtering I — Design*, „IEEE Trans. Circ. Syst.", July, 1976.
53. Droaşcă, B., Necula, M. A., Stănescu D., *Efecte speciale obținute pe baza sistemelor 2-D. Partea I-a*, AMC 35, p. 237 — 247, Ed. Tehnică, 1983.
54. Droaşcă, B., Necula, M. A., Stănescu, D., *Efecte speciale obținute pe baza sistemelor 2-D. Partea a II-a*, AMC 35, p. 248 — 255, Ed. Tehnică, 1983.
55. Ramadrandrane, D., Takhar, I., Swany. E., *On The Synthesis of a Class of Multivariable Positive Real Functions*, „Proc. of IEEE", June, 1977.
56. Necula, M. A., Kalisz, E. *SADASIM — 1D and 2D Digital Systems Simulators*, „Proc. ICD,— LASTED", 1982.
57. Necula, M. A., Kalisz, E., Droaşcă, B., Stănescu, D., *Sisteme discrete bidimensionale: Analiza asistată de calculator*, AMC 35, p. 102 — 120, Ed. Tehnică 1983.
58. Kalisz, E., Necula, M. A., *Computer-assisted Generation of 2D Systems Simulation Models*, „Advances in Modelling & Simulation, AMSE Press", vol. 1, no. 4, p. 55 — 63, 1984.
59. Kalisz, E., *On-line Input Generation in 2D System Simulation*, 6th Int. Conf. on Control Systems and Computer Science, vol. II, p. 303 — 306, May, 1985.
60. Kalisz, E., *Input/Output Processing in 2D Systems Simulation*, Digital Techniques in Simulation, Communication and Control. Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), p. 151 — 154, IMACS, 1985.
61. * * * *Dicționar de informatică*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
62. Droaşcă, B., *Contribuții la analiza și sinteza sistemelor discrete 2D*, teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1983.

Scanned with OKEN Scanner